3. DVOSTRUKI INTEGRAL

PREGLED TEORIJE

3.1. Ograničena oblast G u ravni čiji je rub (zatvorena) kriva C koja se može rektificirati ima (konačnu) površinu $p(G)$. Ta površina data je izrazom

$$p(G)=\sup_{P\subseteq G} p(P)=\inf_{Q\supseteq G} p(Q), \tag{1}$$

gdje su P i Q poligoni, odnosno unije konačno mnogo poligona u istoj ravni.

Specijalno, svaka ograničena oblast G u ravni čiji je rub (zatvorena) po dijelovima glatka kriva ima konačnu površinu $p(G)$.

3.2. Neka je G ograničena oblast u ravni, čiji je rub po dijelovima glatka zatvorena kriva C. Podjela oblasti G je svaki niz $G_1, \ldots, G_n$ podskupova G_i oblasti G čiji su rubovi po dijelovima glatke krive C_i, a dva takva podskupa imaju zajedničke eventualno samo rubne tačke, dok je $G=\bigcup_{i=1}^{n} G_i$.

Zato za svaku podjelu $G_1, \ldots, G_n$ oblasti G svaki od G_i ima konačnu površinu

$$\Delta G_i=p(G_i) \quad (i=1,\ 2, \ldots, n) \tag{2}$$

i vrijedi

$$p(G)=\sum_{i=1}^{n} \Delta G_i . \tag{3}$$

3.2. Neka je

$$f=f(T)=f(x,\ y) \quad (T(x,\ y)\in G) \tag{4}$$

ograničena funkcija na G. Tada za svaku podjelu $G_1, \ldots, G_n$ oblasti G i za svaki izbor tačaka $T_i\in G_i$ $(i=1,\ 2, \ldots, n)$ možemo formirati integralnu sumu

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n} f(T_i)\,\Delta G_i \tag{5}$$

funkcije $f(T)$.

Kaže se da je funkcija $f(T)$ integrabilna na G ako postoji realan broj I takav da se za svako $\varepsilon>0$ može naći $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sa osobinom da za svaku podjelu $G_1, \ldots, G_n$ i za svaki izbor tačaka $T_i\in G_i$ vrijedi

$$\max d(G_i)<\delta \;\Rightarrow\; |I-\sigma_n|<\varepsilon . \tag{6}$$

Pri tome je $d(S) = \sup_{T,\, T' \in S} |\overrightarrow{TT'}|$ dijametar skupa S.

Ako je funkcija $f(T)$ integrabilna na G, tada se piše

$$I = \lim_{\max d(G_i) \to 0} \sigma_n = \iint_G f(T)\, dG = \iint_G f(x, y)\, dxdy \tag{7}$$

i ovaj izraz zove se dvostruki integral funkcije $f(T)$ na oblasti G.

3.3. Svaka funkcija $f(T)$ koja je na oblasti G po dijelovima neprekidna integrabilna je na G. Specijalno je na G integrabilna svaka konstantna funkcija i vrijedi

$$\iint_G k dG = k \cdot p(G). \tag{8}$$

Ako je G', G'' podjela oblasti G, tada za svaku funkciju $f(T)$ koja je integrabilna na G vrijedi

$$\iint_G f(T)\, dG = \iint_{G'} f(T)\, dG + \iint_{G''} f(T)\, dG. \tag{9}$$

Osim toga za svake dvije funkcije $f(T)$ i $g(T)$ integrabilne na G vrijede relacije analogne onima u tački 2.5.

3.4. Ako je V ograničena oblast u prostoru čiji je rub po dijelovima glatka površ, tada V ima (konačnu) zapreminu (volumen)

$$v(V) = \sup_{P \subseteq V} v(P) = \inf_{Q \supseteq V} v(Q), \tag{10}$$

gdje su P i Q poliedri ili unije konačnog broja poliedara.

Neka je oblast V ograničena cilindričnom površi

$$F(x, y) = 0,$$

koja ima po dijelovima glatku zatvorenu direktrisu

$$C: F(x, y) = 0, \; z = 0,$$

zatim nekom po dijelovima glatkom površi

$$z = z(x, y)$$

i oblašću G u Oxy-ravni, koja ima rub C. Tada V ima zapreminu

$$v(V) = \iint_G z(x, y)\, dxdy. \tag{11}$$

3.5. Neka je oblast G ograničena po dijelovima glatkim krivama

$$y = y_1(x), \; y = y_2(x) \; (a \leqslant x \leqslant b) \tag{12}$$

i dijelovima pravih

$$x = a, \text{ odnosno } x = b,$$

pri čemu je (sl. 7)

$$y_1(x) \leqslant y_2(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Ukoliko pri tome postoji

$$I(x) = \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \qquad (\forall x \in [a, b])$$

kao i

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx dy,$$

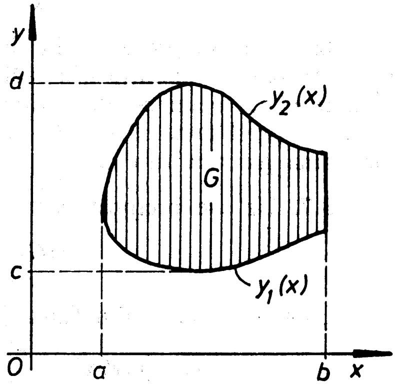
tada postoji i

$$\int\limits_a^b I(x)\, dx$$

i vrijedi

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx dy = \int\limits_a^b I(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy. \qquad (13)$$



Sl. 7

Relacija (13) pokazuje kako se, uz učinjene pretpostavke, računanje dvostrukog integrala svodi na uzastopno računanje dvaju jednostrukih. Te pretpostavke su sigurno ispunjene ako oblast G ima opisani oblik, a funkcija $f(x, y)$ je neprekidna na G.

Slična tvrdnja vrijedi za slučaj oblasti G ograničene po dijelovima glatkim krivima

$$x = x_1(y), \; x = x_2(y) \quad (y \in [c, d])$$

i dijelovima pravih $y = c$, odnosno $y = d$. Tada umjesto (13) vrijedi

$$\iint\limits_G f(x, y)\, dx dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx. \qquad (13')$$

3.6. Neka su na ograničenoj oblasti G, čiji je rub po dijelovima glatka kriva C, definisane funkcije

$$u = u(x, y), \; v = v(x, y). \qquad (14)$$

One oblast G preslikavaju na neki podskup G' ravni $O'uv$. Pretpostavimo da je to preslikavanje obostrano jednoznačno, tj. da postoje jedinstvene funkcije

$$x = x(u, v), \; y = y(u, v) \qquad (15)$$

definisane na G' za koje vrijedi

$$x(u(x, y), v(x, y)) = x, \; y(u(x, y), v(x, y)) = y \; (\text{na } G). \qquad (16)$$

Pretpostavimo dalje da su funkcije (14) i (15) diferencijabilne. Tada iz (16) slijedi ova veza između Jakobiana tih funkcija:

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = 1, \tag{17}$$

dakle, specijalno

$$J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0 \quad (\text{na } G'). \tag{18}$$

Iz učinjenih pretpostavki slijedi da se svaka unutrašnja tačka oblasti G preslikava u unutrašnju tačku skupa G', a svaka po dijelovima glatka kriva iz G na neku po dijelovima glatku krivu iz G'. Specijalno se rub C oblasti G preslikava na rub C' skupa G' i G' je ograničena oblast sa po dijelovima glatkim rubom.

3.7. Uz sve pretpostavke i oznake iz tačke 3.6. vrijedi

$$p(G) = \iint_{G'} |J| \, du dv. \tag{19}$$

Osim toga za svaku funkciju $f(x, y)$ koja je neprekidna na G vrijedi

$$\iint_G f(x, y) \, dx dy = \iint_{G'} f(x(u, v), \; y(u, v)) \, |J| \, du dv. \tag{20}$$

Relacija (2) pokazuje kako se uz učinjene pretpostavke vrši smjena (15) varijabli u dvostrukom integralu. Svrha te smjene je pojednostavljivanje oblasti integracije, a eventualno i same podintegralne funkcije.

3.8. Ako je na ograničenoj oblasti G, čiji je rub po dijelovima glatka kriva, raspoređena masa tako da je površinska gustoća mase

$$\rho = \rho(x, y),$$

tada se ukupna masa oblasti G i koordinate težišta T oblasti G računaju slično kao kad je umjesto G bio u pitanju luk krive.

Slična je stvar i sa momentom inercije u odnosu na neku osu, odnosno neku ravan, te sa silom kojom oblast G privlači materijalnu tačku $T_0(x_0, y_0, z_0)$ u kojoj je skoncentrisana masa m_0.

3.9. Dvostruki integral po oblasti G definiše se analogno i za vektorsku funkciju

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y) = F_1(x, y)\vec{i} + F_2(x, y)\vec{j} + F_3(x, y)\vec{k}. \tag{21}$$

On se označava sa

$$\vec{I} = \iint_G \vec{F}(x, y) \, dx dy, \tag{22}$$

a računa ovako:

$$\iint_G \vec{F}(x, y) \, dx dy = \left(\iint_G F_1(x, y) \, dx dy\right)\vec{i} + \left(\iint_G F_2(x, y) \, dx dy\right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\iint_G F_3(x, y) \, dx dy\right)\vec{k}.$$

Integral (22) ima osobine analogne onima koje smo naveli za odgovarajući integral po luku.

3.10. U svim posmatranim integralima oblast integracije G bila je ograničena. Isto tako ograničena je bila i podintegralna funkcija. Zato su svi ti integrali svojstveni integrali. Kad bar jedan od ova dva uslova nije ispunjen, imamo posla sa nesvojstvenim integralom. Uzmimo najprije da je podintegralna funkcija $f(x, y)$ ograničena na svakom ograničenom dijelu G' oblasti G, ali sama oblast G nije ograničena. Ako za svaki ograničen dio G' oblasti G postoji svojstveni integral

$$I(G') = \iint_{G'} f(x, y)\, dxdy \tag{23}$$

i osim toga za svaku po dijelovima glatku zatvorenu krivu C' i dio G' oblasti G koji leži unutar krive C', postoji konačan

$$\lim_{R \to \infty} I(G') = I, \tag{24}$$

pri čemu je $R = \inf\limits_{T \in C'} |\overrightarrow{OT}|$, tada se kaže da postoji nesvojstveni integral

$$I = \iint_{G} f(x, y)\, dxdy. \tag{25}$$

Umjesto o postojanju govori se i o konvergenciji nesvojstvenog integrala (25).

3.11. Neka je sada oblast G konačna, ali funkcija $f(x, y)$ nije ograničena u okolini izolovanih tačaka $T_1, T_2, \ldots$ i u okolini neke po dijelovima glatke krive C_0 iz G. Iz oblasti G isključimo neku okolinu G_i'' tačke T_i koja ima po dijelovima gladak rub C_i'' $(i = 1, 2, \ldots)$ i neku okolinu G_0'' krive C_0 koja ima po dijelovima gladak rub C_0''. U preostalom dijelu G' oblasti G pretpostavljamo da postoji svojstveni integral (23). Stavimo sada

$$r_i = \sup_{T \in C_i''} |\overrightarrow{T_i T}|, \quad r_0 = \sup_{T'' \in C_0''} \inf_{T \in C_0} |\overrightarrow{TT''}| \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

$$r = \sup \{r_0, r_1, \ldots\}.$$

Ako postoji konačan limes

$$I = \lim_{r \to 0} I(G'), \tag{26}$$

tada se kaže da postoji nesvojstveni integral (25).

3.12. Uzmimo sada, konačno da je oblast G neograničena, ali i da funkcija $f(x, y)$ nije obavezno ograničena na svakom ograničenom d jelu G' oblasti G. Pretpostavimo da na svakom ograničenom dijelu G' oblasti G postoji nesvojstveni integral (23) u smislu tačke 3.11. Ako osim toga postoji konačan limes (24), tada se kaže da postoji nesvojstveni integral (25).

3.13. Neka je zadana funkcija $f(x, y)$ na oblasti G iz tačke 3.5. Ako za svako $x \in [a, b]$ postoji

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dxdy, \tag{27}$$

tada je time na $[a, b]$ definisana funkcija $I(x)$. Ukoliko osim toga, postoji $\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy$, kao i

$$\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx \qquad (\forall\, y \in [c, d]),$$

tada postoji i $\int_a^b I(x)\, dx$ i, prema (13) i (13'), vrijedi

$$\int_a^b I(x)\, dx = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy. \tag{28}$$

Sve učinjene pretpostavke ispunjene su sigurno u slučaju da je $f(x, y)$ neprekidna funkcija na G. Ako je, osim toga, G pravougaonik:

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

relacija (28) prima oblik

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{29}$$

3.14. Neka je G pravougaonik $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, a funkcija $f(x, y)$ definisana na G. Ako za svako $x \in [a, b]$ postoji

$$I(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy, \tag{30}$$

tada je $I(x)$ funkcija definisana na $[a, b]$.

Ukoliko je, osim toga, funkcija $f(x, y)$, kao funkcija od x, neprekidna na $[a, b]$ i to ravnomjerno u odnosu na y, tj. ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tako da vrijedi

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1, y) - f(x_2, y)| < \varepsilon \quad (\forall\, (x_1, y), (x_2, y) \in G),$$

tada je funkcija $I(x)$ neprekidna na $[a, b]$ a za svako $x_0 \in [a, b]$ vrijedi

$$\lim_{x \to x_0} \int_c^d f(x, y)\, dy = \int_c^d (\lim_{x \to x_0} f(x, y))\, dy. \tag{31}$$

Pretpostavke su sigurno ispunjene kad je $f(x, y)$ neprekidna funkcija (dvaju argumenata) na G.

Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna po y na $[c, d]$, a osim toga ima neprekidan parcijalni izvod $f_x'(x, y)$ na D, tada je funkcija (20) diferencijalna na $[a, b]$ i vrijedi:

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d f_x'(x, y)\,dy. \tag{32}$$

Relacija (31) i (32) vrijede i za $d = +\infty$ uz dodatne pretpostavke o ravnomjernoj konvergenciji integrala u odnosu na x.

3.15. Neka je G pravougaonik $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, a

$$y = \alpha(x), \quad y = \beta(x) \quad (x \in [a, b])$$

neprekidne krive iz D. Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna na D, tada je funkcija

$$I(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\,dy \tag{33}$$

neprekidna na $[a, b]$. Ako, osim toga, funkcija $f(x, y)$ ima na G neprekidan izvod $f_x'(x, y)$, a funkcija $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ su diferencijabilne na $[a, b]$, tada je funkcija (33) diferencijabilna na $[a, b]$ i vrijedi

$$I(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x'(x, y)\,dy + f(x, \beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(x, \alpha(x)) \cdot \alpha'(x). \tag{34}$$

ZADACI

Naći oblast definisanosti sljedećih funkcija:

61. $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$.

62. $z = \dfrac{1}{9 - x^2 - y^2}$.

63. $z = \arcsin(x^2 + y^2)$.

64. $z = \arccos(x - y)$.

65. $z = \dfrac{x-y}{x+y}$.

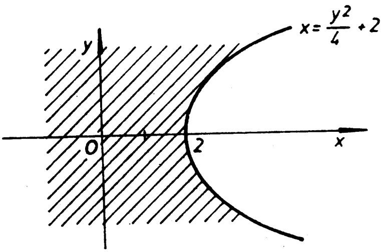
66. $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2 - z^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}}$.

67. $u = \dfrac{1}{x+y+z+1}$.

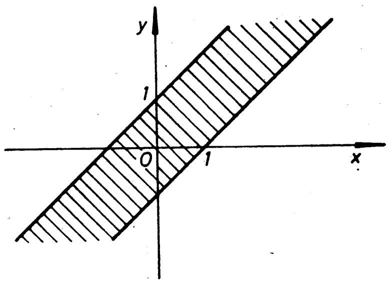
68. $u = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 4} + \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Rješenja:

61. Funkcija z je definisana za one vrijednosti x i y za koje je $y^2 - 4x + 8 > 0$, tj. za $x < \dfrac{y^2}{4} + 2$ (sl. 8).



Sl. 8



Sl. 9

62. Definisana je u cijeloj ravni xOy osim u tačkama kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

63. Oblast definisanosti je krug $\{(x, y): x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

64. $|x - y| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x - y \leqslant 1$, pa je područje definicije $\{(x, y): y \leqslant x + 1 \text{ i } y \geqslant x - 1\}$, (sl. 9).

65. Sve tačke ravni xOy osim tačaka prave $y = -x$.

66. Prvi sabirak je definisan u onim tačkama (x, y, z) za koje je $16 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0$, tj. u tačkama oblasti $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 16$.

Drugi sabirak je definisan u tačkama oblasti $x^2 + y^2 + z^2 - 4 > 0$, tj. $x^2 + y^2 + z^2 > 4$.

Dakle, funkcija u je definisana u onim tačkama koje leže u i na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ a van su sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

67. Sve tačke prostora $Oxyz$ koje ne leže u ravni $x + y + z = -1$.

68. Prvi sabirak je definisan u svim tačkama prostora $Oxyz$ koje ne leže na cilindru $x^2 + y^2 = 4$. Drugi sabirak je definisan u oblasti $1 \geqslant x^2 + y^2 + z^2$.

Dakle, funkcija u je definisana na skupu $\{(x, y, z)\colon x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

69. Za funkciju $z = f(x, y) = \dfrac{x}{x - y}$:

a) izračunati $f(3, 2)$; $f(-4, -5)$, $f(3, 8)$

b) pokazati da je $f(a, b) + f(b, a) = 1$.

Rješenja: a) $f(3, 2) = \dfrac{3}{3-2} = 3$; $f(-4, -5) = \dfrac{-4}{-4+5} = -4$;

$$f(3, 8) = \frac{3}{3-8} = -\frac{3}{5}.$$

b) $f(a, b) + f(b, a) = \dfrac{a}{a-b} + \dfrac{b}{b-a} = \dfrac{a}{a-b} - \dfrac{b}{a-b} = 1.$

70. Data je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{za } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{za } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Pokazati da je funkcija f neprekidna.

b) Pokazati da je funkcija f diferencijabilna.

Rješenje: a) Od interesa je pokazati neprekidnost u tački $(0, 0)$.

Za $(x, y) \neq (0, 0)$ imamo

$$|f(0, 0) - f(x, y)| = \left| xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| = |x \cdot y| \cdot \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leqslant |x \cdot y| \, \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = |x \cdot y|.$$

Pa kako $xy \to 0$ kad $(x, y) \to (0, 0)$, slijedi da je $f(x, y)$ neprekidna funkcija u tački $(0, 0)$.

Napomena: Iz činjenice da je

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x, y)=\lim_{x\to 0} \frac{x^2k^2\cdot(1-k^2)}{1+k^2}=0 \quad (\text{za svako } k)$$

ne možemo zaključiti da je $f(x, y)$ neprekidna u $(0, 0)$.

Na primjer, za funkciju

$$g(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x, y)\neq(0, 0) \\ 0, & (x, y)=(0, 0) \end{cases}$$

vrijedi

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} g(x, y)=\lim_{x\to 0} \frac{kx^3}{x^4+kx^2}=0 \quad (\text{sa svako } k),$$

ali, na primjer,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} g(x, y)=\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2\,x^4}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

pa funkcija $g(x, y)$ nije neprekidna u $(0, 0)$.

b) Dovoljno je pokazati da postoje neprekidni parcijalni izvodi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ u tački $(0, 0)$.

U tački $(0, 0)$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0)}{h}=\lim_{h\to 0} \quad 0\cdot\frac{h^2}{h^3}=0$$

i slično

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

U tačkama $(x, y)\neq(0, 0)$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\,\frac{x^4+4\,x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=x\,\frac{x^4-4\,x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2},$$

pa je lako pokazati da su funkcije $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ neprekidne.

71. Pokazati da je funkcija

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{za } (x, y)\neq(0, 0) \\ 0, & \text{za } (x, y)=(0, 0) \end{cases}$$

neprekidna, a da nema neprekidne izvode u tački $(0, 0)$.

Rješenje. Neprekidnost u tački (0, 0), tj. jednakost $\lim\limits_{M\to(0,\,0)} f(M)=f(0,0)$ lako se pokazuje.

Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{x^4+xx^2y^2+2\,xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{za } (x,\,y)\neq(0,\,0)\\ 1 & \text{za } (x,\,y)=(0,\,0)\end{cases}$$

a $\lim\limits_{M\to(0,\,0)}\dfrac{\partial f(M)}{\partial x}$ ne postoji, to je $\dfrac{\partial f(x,\,y)}{\partial x}$ prekidna u (0, 0).

72. Pokazati da je funkcija

$$f(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{za } (x,\,y)\neq(0,\,0)\\ 0, & \text{za } (x,\,y)=(0,\,0)\end{cases}$$

prekidna u (0, 0).

Rješenje. Ako tačka $M\to(0,\,0)$ po pravcu $y=kx$, onda je

$$\lim_{M\to(0,\,0)} f(M)=\frac{k}{1+k^2},$$

pa granična vrijednost zavisi od putanje kojom se tačka M približava tački (0, 0), a to znači da je $f(x,\,y)$ prekidna u (0, 0).

Ispitati da li je funkcija $f(x,\,y)$ diferencijabilna u tački (0, 0).

73. $f(x,\,y)=\sqrt[3]{xy}$. **74.** $f(x,\,y)=\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

75. $$f(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{za } (x,\,y)\neq(0,\,0)\\ 0 & \text{za } (x,\,y)=(0,\,0).\end{cases}$$

76. $$f(x,\,y)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} & \text{za } (x,\,y)\neq(0,\,0)\\ 0 & \text{za } (x,\,y)=(0,\,0).\end{cases}$$

Rješenja:

73. Funkcija $f(x,\,y)$ je diferencijabilna u tački $(x,\,y)$ ako je

$$\Delta f(x,\,y)=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\alpha, \tag{1}$$

pri čemu za veličinu α važi

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\alpha}{\rho}=0, \quad \left(\rho=\sqrt{dx^2+dy^2}\right). \tag{2}$$

Pokazaćemo da uslov (2) nije ispunjen u tački (0, 0). Kako je $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$, to uslov (2) postaje

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f(0,0)}{\rho}=0. \tag{3}$$

Biće

$$\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy\to 0}}\frac{\sqrt[3]{dxdy}}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Ako uzmemo da je, na primjer, $y=x$, dakle $dy=dx$, onda je

$$\lim_{\substack{dx\to 0\\ dy=dx}}\frac{\Delta f(0,0)}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\lim_{dx\to 0}\frac{\sqrt[3]{dx^2}}{\sqrt{2}\,dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{1}{2\sqrt[3]{dx}}=\infty.$$

Uslov (2) nije ispunjen, što znači da funkcija nije diferencijabilna u tački (0, 0).

74. Ako bi funkcija f bila diferencijabilna u (0, 0), tada bi diferencijal te funkcije bio

$$dz=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}dy=dx+dy.$$

Kako, na primjer, za $y=x$, imamo

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-dz}{\rho}=\lim_{dx\to 0}\frac{\sqrt[3]{dx^3+dx^3}-2\,dx}{\sqrt{2}\,dx}=\lim_{dx\to 0}\frac{(\sqrt[3]{2}-2)\,dx}{\sqrt{2}dx}=\frac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt{2}}\neq 0,$$

funkcija f nije diferencijabilna u tački (0, 0). Treba napomenuti da su oba parcijalna izvoda $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ prekidne funkcije u tački (0, 0), u što se lako uvjeriti. (Neprekidnost parcijalnih izvoda je dovoljan uslov za diferencijabilnost funkcije u tački.)

75. Kad bi funkcija f bila diferencijabilna, tada bi, zbog

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=1,$$

imala diferencijal $df=dx+dy$.

Lako se pokazuje da je u tački (0, 0)

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f-df}{\rho}\neq 0,$$

pa f nije diferencijabilna.

76. Da, jer ima neprekidne parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Odrediti projekcije l linije L na ravan xoy:

77. $L: 4-x^2-y^2=z, \quad z=y^2.$

78. $L: x^2+y^2=z^2, \quad (z>0), \quad x+y+z=1.$

79. $L: x^2+y^2+z^2=4, \quad x^2+y^2=z^2, \quad (z>0).$

80. $L: x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x+y+z=0.$

81. $L: 2x+y+z=1, \quad x-y-3z=5.$

82. $L: z=x^2+y^2, \quad z=2x+2y.$

Rješenja:

77. Linija L je data kao presjek površi $z=4-x^2-y^2$ i $z=y^2$ (paraboloid i cilindar). Projekcija linije L na ravan Oxy je skup onih tačaka (x, y) za koje je aplikata z sa jedne površi jednaka aplikati z sa druge površi, dakle, taj skup određujemo iz uslova

$$4-x^2-y^2=y^2.$$

Projekcija je, dakle, elipsa

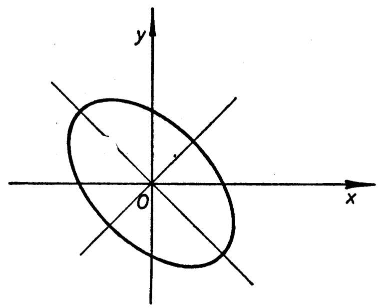
$$\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1.$$

78. $1=2x+2y-2xy.$

79. $x^2+y^2=2.$

80. Kriva ima projekciju

$$2x^2+2y^2+2xy-a^2=0.$$



Sl. 10

To je elipsa sa centrom u $(0, 0)$. Ose elipse su prave $y=\pm x$, a poluose su a i $\frac{a}{3}$ (sl. 10).

81. $7x+2y-8=0.$ **82.** $(x-1)^2+(y-1)^2=2.$

Po definiciji izračunati integrale:

83. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant a\\0\leqslant y\leqslant b}} xy\,dx\,dy.$ **84.** $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1}} x^2y\,dx\,dy.$ **85.** $\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\c\leqslant y\leqslant d}} e^{x+y}\,dx\,dy.$

Rješenja:

83. Funkcija $f(x, y)=xy$ je neprekidna pa i integrabilna na pravougaoniku $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant b$. Podijelimo dati pravougaonik pravama $x=x_i$ $(i=1, \ldots, n)$, $y=y_j$ $(j=1, \ldots, m)$. Po definiciji je

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\lim_{\substack{m\to\infty\\n\to\infty}}\sum_{i,j=1}^{n,m} f(M_{i,j})\cdot(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

pri čemu maksimalni podjeljak teži nuli kada $m \to \infty$, $n \to \infty$. Izaberimo da je:

$$x_i = \frac{a}{n} \cdot i, \qquad y_j = \frac{b}{m} j,$$

i da je

$$M_{i,j} = \left(\frac{a}{n}(i-1), \quad \frac{b}{m}(j-1) \right).$$

Biće:

$$\iint\limits_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b}} xy dx dy = \lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{a}{n}(i-1) \cdot \frac{b}{m}(j-1) \cdot \frac{ab}{n \cdot m} =$$

$$= \lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{b^2}{m^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) \sum_{j=1}^{m} (j-1) =$$

$$= \lim_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} \frac{a^2 b^2}{n^2 \cdot m^2} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot \frac{(m-1) \cdot m}{2} = \frac{a^2 b^2}{4}.$$

84. $\frac{1}{6}$.

85. Integral postoji jer je funkcija $f(x, y) = e^{x+y}$ neprekidna. Segment $[a, b]$ podijelimo pravama $x_i = a + \frac{b-a}{n} \cdot i$, $(i = 0, 1, \ldots, n)$, a $[c, d]$ pravama $y_j = c + \frac{d-c}{m} \cdot j$, $(j = 0, 1, \ldots, m)$, i u pravougaoniku $[x_{i-1}, x_i; y_{j-1}, y_j]$ uočimo tačku $M_{ij} = \left(a + \frac{b-a}{n} \cdot i, \ c + \frac{d-c}{m} \cdot j \right)$. Formirajmo integralnu sumu

$$S_{m,n} = \sum_{i,j=1}^{n,m} f(M_{i,j}) (x_i - x_{i-1}) (y_i - y_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} e^{a + \frac{b-a}{n} \cdot i} \cdot e^{c + \frac{d-c}{m} j} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{m} =$$

$$= e^a \cdot e^c \cdot \frac{b-a}{n} \cdot \frac{d-c}{m} \cdot \sum_{i=1}^{n} e^{\frac{b-a}{n} \cdot i} \cdot \sum_{j=1}^{m} e^{\frac{d-c}{m} j}.$$

Dobili smo geometrijske sume, pa je

$$S_{m,n} = e^a \cdot \frac{b-a}{n} \cdot e^{\frac{b-a}{n}} \cdot \frac{1 - \left(e^{\frac{b-a}{n}} \right)^n}{1 - e^{\frac{b-a}{n}}} \cdot e^c \cdot \frac{d-c}{m} \cdot e^{\frac{d-c}{m}} \cdot \frac{1 - \left(e^{\frac{d-c}{m}} \right)^m}{1 - e^{\frac{d-c}{m}}} =$$

$$= e^a \cdot \frac{b-a}{n} \cdot e^{\frac{b-a}{n}} \cdot \frac{1 - e^{b-a}}{1 - e^{\frac{b-a}{n}}} \cdot e^c \cdot \frac{d-c}{n} \cdot e^{\frac{d-c}{n}} \cdot \frac{1 - e^{d-c}}{1 - e^{\frac{d-c}{m}}}.$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{1-e^{\frac{b-a}{n}}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{1-e^{\alpha}}=-1$$

i

$$\lim_{m\to\infty}\frac{d-c}{m}\,\frac{1}{1-e^{\frac{d-c}{m}}}=-1,$$

to

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}} S_{m,\,n}=e^{a}\cdot\frac{(1-e^{b-a})}{-1}\cdot e^{c}\cdot\frac{(1-e^{d-c})}{-1}=$$

$$=(e^{a}-e^{b})\cdot(e^{c}-e^{d}).$$

Dakle,

$$\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ c\leqslant y\leqslant d}} e^{x+y}\,dx\,dy=(e^{a}-e^{b})\,(e^{c}-e^{d}).$$

Promijeniti poredak integracije u sljedećim integralima uzimajući da je $f(x, y)$ neprekidna funkcija:

86. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{x}f(x, y)\,dy.$

87. $\int\limits_{1}^{e}dx\int\limits_{0}^{\ln x}f(x, y)\,dy.$

88. $\int\limits_{0}^{4}dx\int\limits_{3x^{2}}^{12x}f(x, y)\,dy.$

89. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x}^{2-x}f(x, y)\,dy.$

90. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{\sqrt{y}}^{2-y}f(x, y)\,dx.$

91. $\int\limits_{-7}^{1}dx\int\limits_{2-\sqrt{7-6y-y^{2}}}^{2+\sqrt{7-6y-y^{2}}}f(x, y)\,dx.$

92. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^{2}}}f(x, y)\,dx.$

93. $\int\limits_{0}^{\pi}dx\int\limits_{0}^{\sin x}f(x, y)\,dy.$

94. $\int\limits_{-1}^{0}dy\int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2\sqrt{1+y}}f(x, y)\,dx+\int\limits_{0}^{8}dy\int\limits_{-2\sqrt{1+y}}^{2-y}f(x, y)\,dx.$

95. $\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{\frac{1}{2}(1-x^{2})}^{\sqrt{1-x^{2}}}f(x, y)\,dy.$

96. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{\frac{y^{2}}{2}}^{\sqrt{3-y^{2}}}f(x, y)\,dx.$

Rješenja:

86. $\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{y}^{1}f(x, y)\,dx.$

87. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{e^y}^{e} f(x, y)\, dx.$

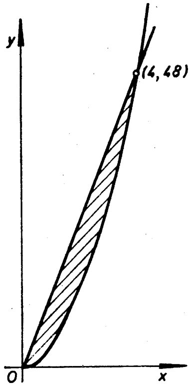
88. $x = 12x \Rightarrow x = \dfrac{y}{12},$

$$y = 3x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{y}{3}},$$

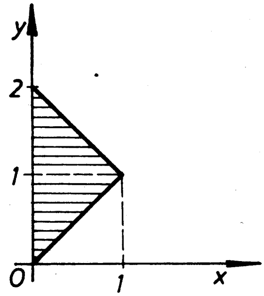
$\int\limits_0^{48} dy \int\limits_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y)\, dx$ (sl. 11).

89. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x, y)\, dx +$

$+ \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x, y)\, dx.$ (sl. 12).



Sl. 11



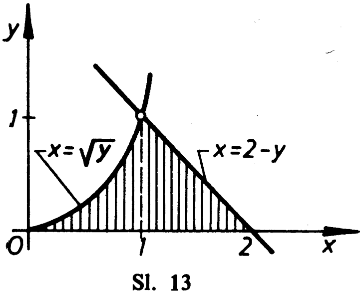
Sl. 12

90. Oblast integracije (sl. 13) dijelimo na dvije; biće

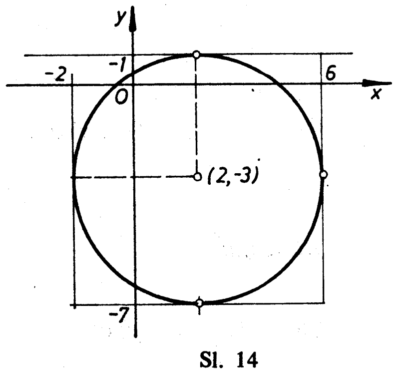
$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{x^2} f(x, y)\, dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x, y)\, dy.$$

91. Nacrtajmo linije koje ograničavaju oblast integracije $x_1 = 2 - \sqrt{7 - 6y - y^2}$, $x_2 = 2 + \sqrt{7 - 6y - y^2}$, $y = -7$, $y = 1$. Linije x_1 i x_2 su polukružnice kružnice $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$. Oblast integracije je unutrašnjost kruga (sl. 14), pa je dati integral jednak integralu

$$\int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{12-x^2+2x}}^{-3+\sqrt{12-x^2+2x}} f(x, y)\, dy.$$



Sl. 13



Sl. 14

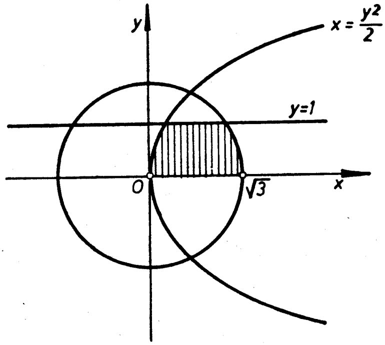
92. $\int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, dy.$

93. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y)\, dx.$ **94.** $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y)\, dy.$

95. $\int\limits_{0}^{1/2} dy \int\limits_{\sqrt{1-2y}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx + \int\limits_{1/2}^{1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, dx.$

96. Oblast integracije (sl. 15) ograničena je pravama $y=0$, $y=1$, lukom parabole $x=\frac{y^2}{2}$ i lukom kružnice $x^2+y^2=3$, $(x>0)$.

Prava $y=1$ i parabola sijeku se u tački sa apscisom $\frac{1}{2}$; prava $y=1$ i luk $x=\sqrt{3-y^2}$ sijeku se u tački sa apscisom $\sqrt{2}$. Otuda je



Sl. 15

$$\int\limits_{0}^{1/2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2x}} f(x, y)\, dy + \int\limits_{1/2}^{1} dx \int\limits_{0}^{1} f(x, y)\, dy +$$

$$+ \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y)\, dy.$$

Izračunati integral I:

97. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ 0\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}}} \sin(x+y)\, dxdy.$ **98.** $\iint\limits_{\substack{-1\leqslant x\leqslant 1\\ -2\leqslant y\leqslant 2}} \left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y\right) dxdy.$

99. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant x}} (x^2+y^2)\, dxdy.$ **100.** $\iint\limits_{\substack{-3\leqslant x\leqslant 1\\ 2x-1\leqslant y\leqslant 2-x^2}} (x-y)\, dxdy.$

101. $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y\leqslant 1-x}} (2x^2+y^2+1)\, dxdy.$ **102.** $\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} x^2\, dxdy.$

103. $\iint\limits_{D} (x+y)\, dxdy,$ gdje je D oblast ograničena linijama $y=x^2$, $y=x$.

Rješenja:

97. Integral ćemo izračunati svođenjem na jednostruke integrale. Biće

$$I=\int_0^{\pi/2} dx\int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dy=\int_0^{\pi/2} dx\,[-\cos(x+y)]\Big|_0^{\pi/2}=\int_0^{\pi/2}\left[\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]dx=$$

$$=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}=1+1=2.$$

98. $$I=\int_{-1}^{1} dx\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(y-\frac{1}{3}xy-\frac{1}{8}y^2\right)\Big|_{-2}^{2}dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(4-\frac{4}{3}x\right)dx=\left(4x-\frac{2}{3}x^2\right)\Big|_{-1}^{1}=8.$$

Ako se izvrši integracija najprije po x pa po y, dobiće se isti rezultat:

$$I=\int_{-2}^{2} dy\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(x-\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{4}xy\right)\Big|_{-1}^{1}dy=$$

$$=\int_{-2}^{2}\left(2-\frac{1}{2}y\right)dy=\left(2y-\frac{1}{4}y^2\right)\Big|_{-2}^{2}=8.$$

99. $$I=\int_0^1 dx\int_0^x (x^2+y^2)\,dy=\int_0^1 dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^x=\int_0^1\left(x^3+\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{1}{3}.$$

100. Prava $y=2x-1$ i parabola $y=2-x^2$ sijeku se u tačkama $(-3,\ -7)$, $(1,\ 1)$ (sl. 16). Biće:

$$I=\int_{-3}^{1} dx\int_{2x-1}^{2-x^2}(x-y)\,dy=\int_{-3}^{1}\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{2x-1}^{2-x^2}dx=$$

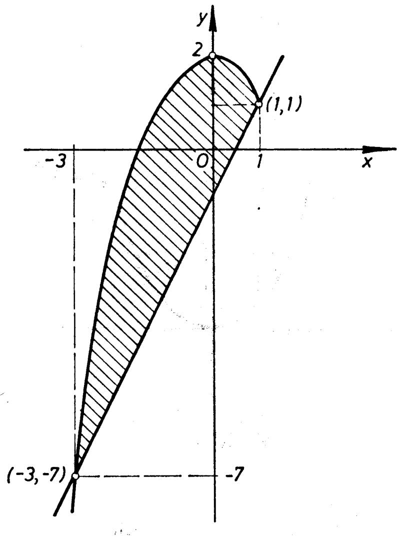
$$=\int_{-3}^{1}\left(2x-x^3-2+2x^2-\frac{1}{2}x^4-2x^2+x+2x^2-2x+\frac{1}{2}\right)dx=$$

$$=\int_{-3}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^4-x^3+2x^2+x-\frac{3}{2}\right)dx=4\frac{4}{15}.$$

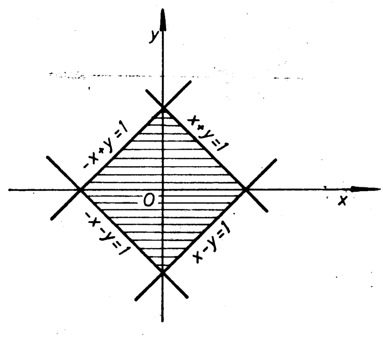
101. $\frac{3}{4}$. **102.** Oblast integracije prikazana je na sl. 17. Biće:

$$I=\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} x^2\,dxdy=\int\limits_0^1 x^2\,dx\int\limits_{x-1}^{1-x} dy+\int\limits_{-1}^{0} x^2\,dx\int\limits_{-1-x}^{1+x} dy=$$

$$=2\int\limits_0^1 x^2(1-x)\,dx+2\int\limits_{-1}^{0} x^2(1+x)\,dx=\frac{1}{3}.$$



Sl. 16



Sl. 17

103. $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}(x+y)\,dy=\int\limits_0^1\left(x^2+\frac{x^2}{2}-x^3-\frac{x^4}{2}\right)dx=\frac{3}{20}.$

Izračunati zapreminu tijela ograničenog površima:

104. $z=x^2+y^2,\ \ y=x^2,\ \ x=1,\ \ z=0.$

105. $z=xy,\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ z=0,\ \ x^2+y^2=r^2.$

106. $z=4-y^2,\ \ y=\frac{x^3}{2},\ \ z=0.$

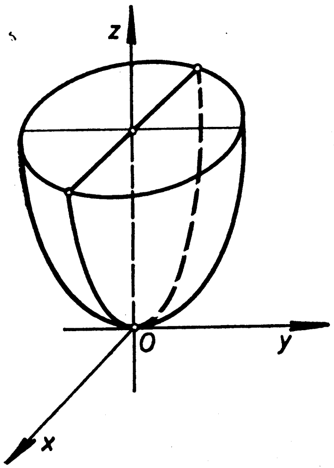
107. $z=1-4x^2-y^2,\ \ z=0.$

Rješenja:

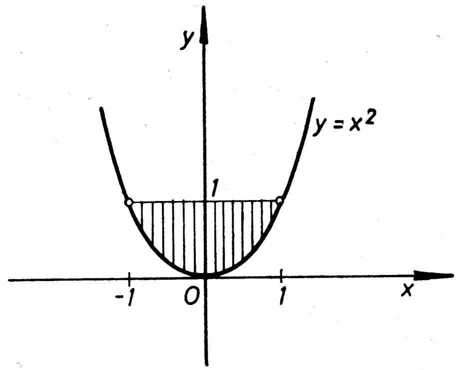
104. Zapremina tijela V ograničenog sa ravni $z=0$, površi $z=f(x, y)$ $(z\geqslant 0)$ i cilindrom koji izrezuje oblast D (x, y)-ravni, a ima izvodnice paralelne sa z-osom, data je sa

$$V=\iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

U ovom slučaju površ $z=f(x, y)$ je paraboloid $z=x^2+y^2$, (slika 18a) dok je oblast D data na slici 18b.



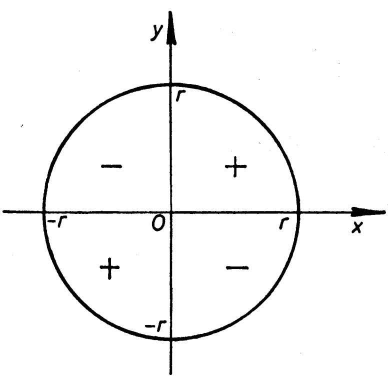
Sl. 18 a



Sl. 18 b

Biće

$$V=\iint_D (x^2+y^2)\, dxdy=\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} (x^2+y^2)\, dy=\frac{88}{105}.$$



Sl. 19

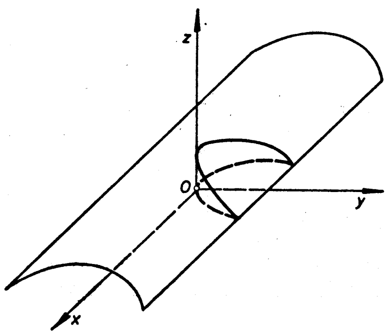
105. Tijelo V se sastoji iz četiri jednaka dijela od kojih su dva ispod ravni $z=0$ (sl. 19). Biće

$$V=4\int_0^r x\,dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} y\,dy=$$

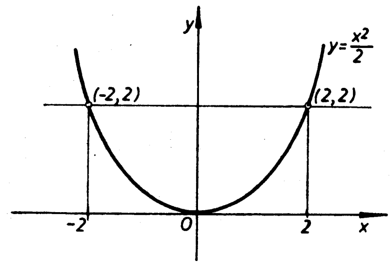
$$=2\int_0^r x\,(r^2-x^2)\,dx=\frac{r^4}{2}.$$

106. Površ $z=4-y^2$ je parabolični cilindar okomit na ravan yOz, a površ

$y=\dfrac{x^2}{2}$ je parabolični cilindar okomit na ravan xOy (sl. 20). Tijelo V projektuje se na oblast D u ravni $z=0$ ograničenu parabolom $y=\dfrac{x^2}{2}$ i presjekom cilindra $z=4-y^2$ i ravni $z=0$ (sl. 21).



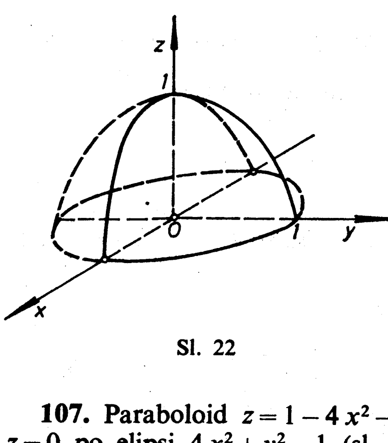
Sl. 20



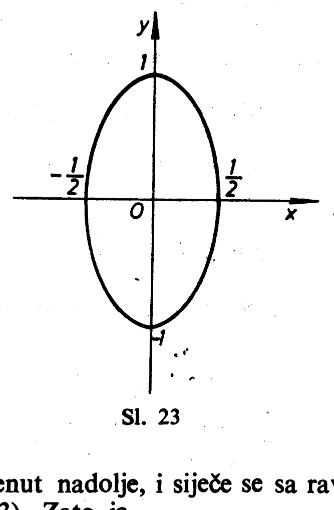
Sl. 21

$$V=\iint_D (4-y^2)\,dxdy=\int_{-2}^{2} dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{2}(4-y^2)\,dy=2\int_0^2 dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{2}(4-y^2)\,dy=$$

$$=2\int_0^2\left(4y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{x^2}{2}}^{2}dx=2\int_0^2\left(8-\frac{8}{3}-2x^2+\frac{x^6}{24}\right)dx=\frac{256}{21}.$$



Sl. 22



Sl. 23

107. Paraboloid $z=1-4x^2-y^2$ je okrenut nadolje, i siječe se sa ravni $z=0$ po elipsi $4x^2+y^2=1$ (sl. 22 i sl. 23). Zato je

$$V=\iint_D (1-4x^2-y^2)=\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}} (1-4x^2-y^2)\,dy=$$

$$=4\int_0^{1/2} dx \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} (1-4x^2-y^2)dy=\frac{8}{3}\int_0^{1/2} (1-4x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx.$$

Smjenom $2x=\sin t$ dobija se

$$V=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4 t\,dt=\frac{4}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 dt=\frac{\pi}{4}.$$

Oblast D preslikati pomoću preslikavanja f: $(x, y)\to(u\ v)$.

108. D je oblast ograničena parabolama $y^2=px$, $y^2=qx$, $x^2=ay$, $x^2=by$, $0<p<q$, $0<a<b$, a preslikavanje f je dato jednakostima $y^2=ux$, $x^2=vy$.

109. $D=\left\{(x, y): -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant a\right\}$, a preslikavanje f je dato sa $u=\sin x \operatorname{ch} y$, $v=\cos x \operatorname{sh} y$.

110. $D=\left\{(x, y): |x|\leqslant\ln a,\ -\frac{1}{4}\pi\leqslant y\leqslant\frac{3}{4}\pi\right\}$, a preslikavanje f je dato sa $u=e^x\cos y$, $v=e^x\sin y$.

111. $D=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant r^2\}$, a preslikavanje f je dato sa $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

112. $D=\left\{(x, y): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$, a preslikavanje f je dato sa $x=$ $=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$.

113. D je oblast ograničena linijama $xy=p$, $xy=q$, $y^2=ax$, $y^2=bx$, $(0<p<q,\ 0<a<b)$, a preslikavanje f je dato sa $u=xy$, $v=\frac{y^2}{x}$.

Rješenja:

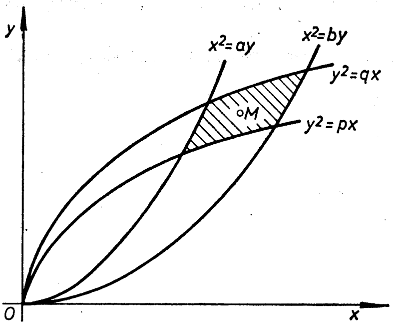
108. Odredićemo Jakobijan preslikavanja. Kako je $u=\frac{y^2}{x}$, $v=\frac{x^2}{y}$, to je:

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix}=1-\frac{4xy}{xy}=1-4=-3.$$

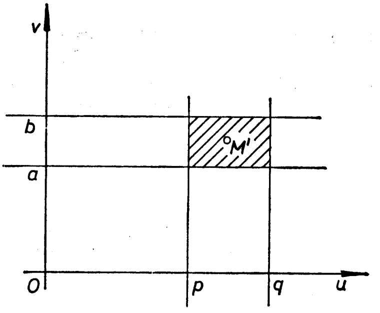
Dakle,

$$J=\frac{D(x, y)}{D(u, v)}=-\frac{1}{3}\neq 0,$$

pa je preslikavanje obostrano jednoznačno. Slike datih parabola su prave $u=p$, $u=q$, $v=a$, $v=b$, a oblast D (sl. 24) se preslikava na pravougaonik D' (sl. 25). Tačka $M\in D$ preslikava se na $M'\in D'$.



Sl. 24

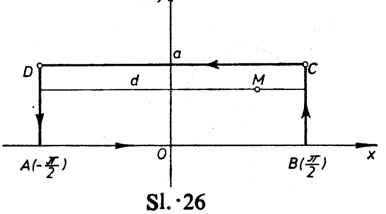


Sl. 25

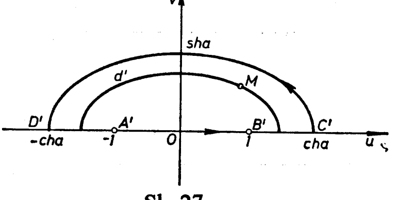
109. Preslikavanje je obostrano jednoznačno na $D\setminus\{A, B\}$, jer je

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos x\operatorname{ch} y & \sin x\operatorname{sh} y\\ -\sin x\operatorname{sh} y & \cos x\operatorname{ch} y\end{vmatrix}=\cos^2 x\operatorname{ch}^2 y+\sin^2 x\operatorname{sh}^2 y\neq 0$$

za $(x, y)\in D\setminus\{A, B\}$. Dio $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $y=0$ preslikava se na dio $-1\leqslant u\leqslant 1$, $v=0$ prave $v=0$ (sl. 26 i 27). Duž BC ima jednačinu: $x=\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant y\leqslant a$, pa je njena slika skup tačaka (u, v) za koje je $u=\operatorname{ch} y$, $v=0$.



Sl. 26



Sl. 27

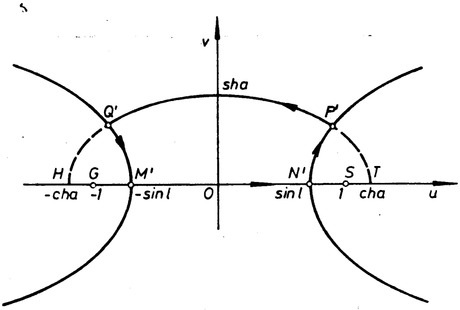
Duž DC ima jednačinu $y=a$, $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, pa se preslikava na skup tačaka (u, v) za koje je $u=\sin x\operatorname{ch} a$, $v=\cos x\operatorname{sh} a$, $v\geqslant 0$, tj. na gornju polovinu elipse

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 a}+\frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 a}=1.$$

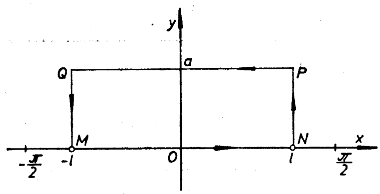
Duž DA preslikava se na duž $D'A'$ (sl. 26 i 27).

Da se unutrašnja tačka M oblasti D preslikava u unutrašnju tačku oblasti gornje poluelipse, može se zaključiti na sljedeći način. Kroz tačku M uočimo duž d paralelnu sa duži AB; njena slika će biti gornji luk elipse čije su poluose manje od $\operatorname{ch} a$ i $\operatorname{sh} a$, pa kako $M \in d \Rightarrow M' \in d'$, to slijedi zaključak.

Primjedba. Neka student sam nađe sliku pravougaonika $D = \{(x, y): -l \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant y \leqslant a,\ 0 \leqslant l \leqslant \frac{\pi}{2}$ (sl. 28 a i b). (Prava $x = l$ se preslikava na skup tačaka (u, v) za koje je $u = \sin l \operatorname{ch} y$, $v = \cos l \operatorname{sh} y$, tj. na skup tačaka (u, v) hiperbole $\frac{u^2}{\sin^2 l} - \frac{v^2}{\cos^2 l} = \operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$.)



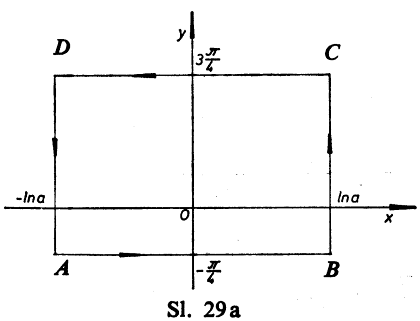
Sl. 28 a



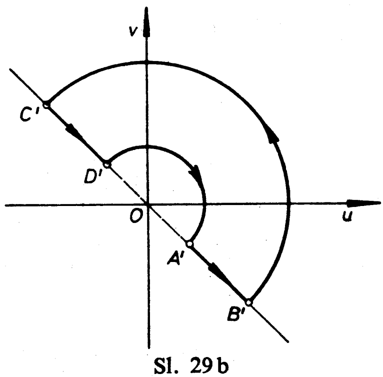
Sl. 28 b

Kada $l \to \frac{\pi}{2}$, onda figura $M'N'P'Q'$ (sl. 28 a) postaje gornja poluelipsa, tj. $N'P'$ (luk hiperbole) teži duži ST.

110. Odredimo sliku konture oblasti $\mathcal{D}$ (sl. 29 a).



Sl. 29 a



Sl. 29 b

Duž AB ima jednačinu $y = -\frac{\pi}{4}$, $-\ln a \leqslant x \leqslant \ln a$, pa će biti (sl. 29 b).

$$A'B' = \left\{(u, v) : u = \frac{e^x}{\sqrt{2}},\ v = -\frac{e^x}{\sqrt{2}},\ -\ln a \leqslant x \leqslant \ln a\right\},$$

dakle, $A'B'$ je dio prave $v=-u$, pri čemu je $v<0$, i to $-\frac{a}{\sqrt{2}}\leqslant v\leqslant -\frac{a^{-1}}{\sqrt{2}}$.

Na isti način zaključujemo da duž CD ima sliku $C'D'$, duž na pravoj $v=-u$,

$$\frac{a^{-1}}{\sqrt{2}}\leqslant v\leqslant\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

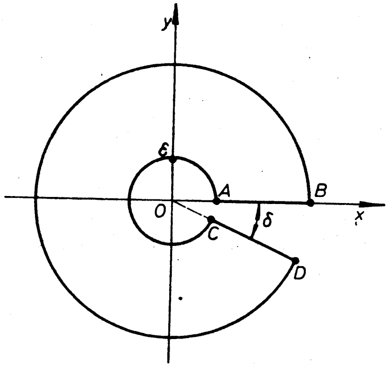
Duž BC ima jednačinu $x=\ln a$, $-\frac{\pi}{4}\leqslant y\leqslant\frac{3\pi}{4}$, pa će njena slika biti skup tačaka $\{(u, v): u=a\cdot\cos y,\ v=a\ \sin y\}$. Dakle, to je dio kružnice poluprečnika a.

Na isti način se zaključuje da duž DA ima kao sliku dio kružnice poluprečnika a^{-1}.

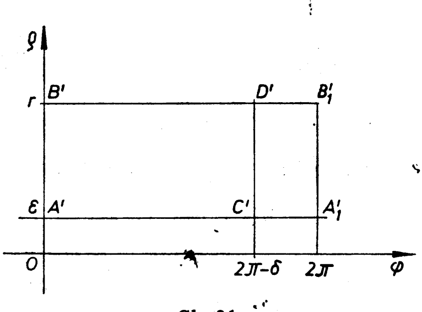
Preslikavanje je obostrano jednoznačno jer je

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)}=e^x>0,\quad \text{za svako } x.$$

111. Kako je $\frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)}=\rho$, a u tački $(0, 0)\in D$ je $\rho=0$, to ćemo najprije naći sliku oblasti $G\subset D$ koja je određena dijelovima kružnica poluprečnika r i ε, dužima AB i CD, pri čemu duž AB leži na x-osi, a duž CD na polupravoj čija je početna tačka $O(0, 0)$ i koja gradi ugao $2\pi-\delta$ (odnosno δ) sa polupravom OB (sl. 30a). Oblast G se preslikava na pravougaonik $A'B'D'C'$ (sl. 31a).



Sl. 30a

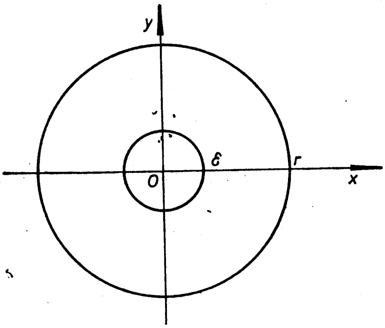


Sl. 31a

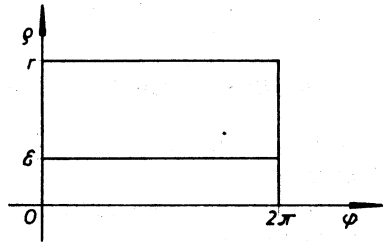
Ako pustimo da $\delta\to 0$, onda tačka $C\to A$, $D\to B$, i $D'\to B_1'$, $C'\to A_1'$.

Dakle, duži AB u ovom preslikavanju odgovaraju i duž $A'B'$ i duž $A_1' B_1'$.

Kružni prsten određen kružnicama poluprečnika r i ε preslikava se na pravougaonik određen pravama $\rho=\varepsilon$, $\rho=r$, $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$ (sl. 30b, 31b).



Sl. 30b



Sl. 31b

Ako sada pustimo da $\varepsilon \to 0$, onda slika ε kružnice (duž) teži duži $[0,2\pi]$ na pravoj $\rho=0$ u sistemu $O\rho\varphi$. To znači da u ovom preslikavanju tački $(0, 0)$ odgovara duž $[0,2\pi]$. Krug poluprečnika r preslikava se na pravougaonik $\rho=0$, $\rho=r$, $\varphi=0$, $\varphi=2\pi$.

Primjedba. Neka student uoči značenja veličina ρ i φ u koordinatnom sistemu Oxy.

112. $J=ab\rho$, preslikavanje nije obostrano jednoznačno, slika je pravougaonik.

113. $J=\dfrac{1}{3v}$, slika je pravougaonik.

Pomoću smjene promjenljivih izračunati integrale:

114. $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{r^2-(x^2+y^2)}\,dxdy$, gdje je D oblast ograničena kružnicom $x^2+y^2-rx=0$.

115. $\displaystyle\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy$, gdje je D oblast ograničena kružnicama $x^2+y^2=e^2$ i $x^2+y^2=e^4$.

116. $I(r)=\displaystyle\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$, gdje je D oblast ograničena kružnicom $x^2+y^2=r^2$. Naći $\lim I(r)$ kad $r\to\infty$.

117. $\displaystyle\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)\left(1+\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)}$. $D=\{(x, y): x^2-y^2\leqslant 0,\ 1\leqslant x^2+$ $+y^2\leqslant 4\}$.

118. $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$, $D=\left\{(x, y): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right\}$.

119. $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$, $D=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1, \quad 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

120. $\iint\limits_D (x+y)^p (x-y)^q\, dxdy$, D je oblast ograničena pravama $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$, p realan a q prirodan broj.

121. $\iint\limits_D xydxdy$, D je oblast ograničena linijama $y^3=ax^2$, $y^3=bx^2$, $y=px$, $y=qx$ $(0<a<b;\ 0<p<q)$.

122. $\iint\limits_D (x^2+y^2)^{-2}\, dxdy$, gdje je D oblast ograničena kružnicama $l_1: x^2+y^2-2x=0$, $l_2: x^2+y^2-4x=0$; $l_3: x^2+y^2-2y=0$, $l_4: x^2+y^2-4y=0$.

Rješenja:

114. Uvodeći smjenu promjenljivih $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, podintegralna funkcija postaje $\sqrt{a^2-\rho^2}$, pa kako je $|J|=\rho$, biće

$$I=\iint\limits_{D'} \sqrt{a^2-\rho^2}\ \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Jednačina kružnice u novim koordinatama je:

$$x^2+y^2-rx=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi-r\rho\cos\varphi=0,$$

tj. $\rho=r\cos\varphi$.

Otuda je

$$I=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\rho(\varphi)} \sqrt{r^2-\rho^2}.\ \rho d\rho=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{r\cos\varphi} \rho\sqrt{r^2-\rho^2}\, d\rho=$$

$$=-\frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (r^2-\rho^2)^{3/2}\Bigg|_0^{r\cos\varphi} d\varphi=\frac{r^3}{3}\int\limits_{+\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^3\varphi)\, d\varphi=\frac{r^3\pi}{3}.$$

115. Smjenom $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ dobija se

$$\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\, dxdy=2\iint\limits_{D'} \rho\ln\rho\ d\rho\ d\varphi=2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_e^{e^2} \rho\ln\rho\ d\rho=$$

$$=4\pi\int\limits_e^{e^2} \rho\ln\rho\ d\rho=4\pi\left[\frac{1}{2}\rho^2\ln\rho-\frac{1}{4}\rho^2\right]_e^{e^2}=\pi e^2(3e^2-1).$$

(Za izračunavanje integrala $\int\rho\ln\rho\ d\rho$ primijenjena je parcijalna integracija.)

116. $I(r)=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^r e^{-\rho^2}\rho\, d\rho=(1-e^{-r^2})\pi,$

$\lim\limits_{r\to\infty} I(r)=\pi$. Ovo znači da je

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt\right)^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\, dx dy=\pi,$$

tj.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt=\sqrt{\pi}.$$

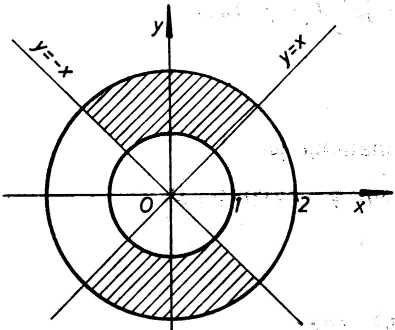
117. Najprije skiciraćemo oblast integracije. Biće:

$\{(x, y): x^2-y^2\leqslant 0\}=\{(x, y):(x-y)(x+y)\leqslant 0\}=\{(x, y): x<y \wedge x>-y$ ili $x>y\wedge x<-y\}$,

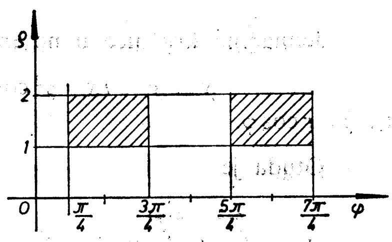
odnosno

$$\{(x, y): x^2-y^2\leqslant 0\}=\{(x, y): x^2\leqslant y^2\}=\{(x, y):|x|\leqslant|y|\}.$$

Oblast integracije D prikazana je na sl. 32a.



Sl. 32a



Sl. 32b

Smjenom $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, data oblast D preslikava se na oblast D' (sl. 32a i b), pa je:

$$I=\iint\limits_{D'}\frac{d\rho\, d\varphi}{\rho(1+\sqrt[3]{\rho^2})}=\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi\int\limits_1^2\frac{d\rho}{\rho(1+\sqrt[3]{\rho^2})}+\int\limits_{5\pi/4}^{7\pi/4} d\varphi\int\limits_1^2\frac{d\rho}{\rho(1+\sqrt[3]{\rho^2})}=$$

$$=\pi\int\limits_1^2\frac{d\rho}{\rho(1+\sqrt[3]{\rho^2})}.$$

Smjenom $\sqrt[3]{\rho^2}=t$ dobija se

$$I=\frac{3\pi}{2}\int\limits_1^{\sqrt[3]{4}}\frac{1}{t(t+1)}\, dt=\frac{3\pi}{2}\ln\frac{t}{t+1}\Bigg|_1^{\sqrt[3]{4}}=\frac{\pi}{2}\ln\frac{32}{(1+\sqrt[3]{4})^3}.$$

118. Uvodeći smjenu $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, $(J = ab\rho)$, dobija se

$$I = ab\iint_{D'} \sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = ab\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho =$$

$$= 2\pi ab\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho = \frac{2}{3}\pi ab.$$

119. Oblast D podijelićemo pravom $y = x$, i koristićemo se smjenom $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Prava $x = 1$ u polarnim koordinatama ima jednačinu $\rho = \dfrac{1}{\cos\varphi}$, a prava $y = 1$ ima jednačinu $\rho = \dfrac{1}{\sin\varphi}$. Zato je:

$$I = \iint_{D'} \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{(1+\rho^2)^{3/2}} = \int_0^{\pi/4} d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \frac{\rho\,d\rho}{(1+\rho^2)^{3/2}} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi\int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \frac{\rho\,d\rho}{(1+\rho^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{6}.$$

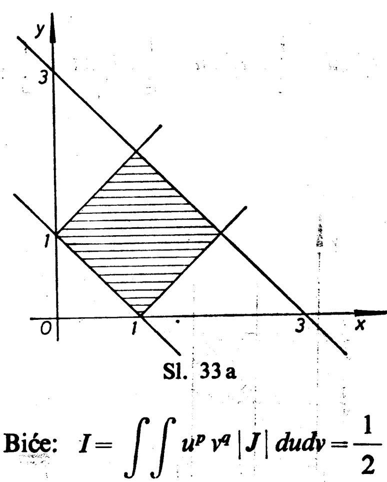
Neka student nacrta oblast D' u ravni $O\rho\varphi$.

120. Koristićemo smjenu

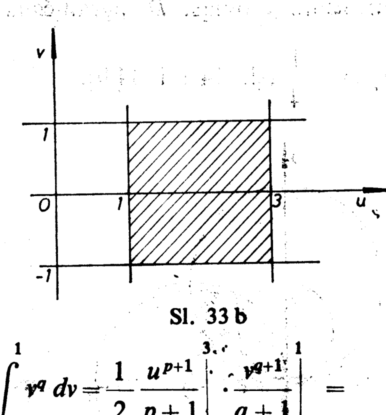
$$x + y = u, \quad x - y = v \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(u+v), \quad y = \frac{1}{2}(u-v).$$

Oblast D (kvadrat na sl. 33a) preslikava se na kvadrat D' (sl. 33b.); preslikavanje je obostrano jednoznačno, jer je

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\[2mm] \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\ (\neq 0).$$



Sl. 33 a



Sl. 33 b

Biće: $I = \iint_{D'} u^p v^q |J|\,du\,dv = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^3 u^p\,du\int_{-1}^1 v^q\,dv = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{u^{p+1}}{p+1}\Bigg|_1^3 \cdot \dfrac{v^{q+1}}{q+1}\Bigg|_{-1}^1 =$

$$= \frac{1}{2(p+1)(q+1)}\cdot(3^{p+1}-1)\cdot[1-(-1)^{q+1}] \text{ za } p \neq -1, \quad q \neq -1.$$

Konačno, $I=0$ za $q=2k-1$, $\pm k=1, 2, \ldots$; $I=\dfrac{3^{p+1}-1}{(p+1)(q+1)}$ za $q=2k$, $\pm k=0, 1, 2, \ldots$

Neka student samostalno riješi slučaj $p=-1 \vee q=-1$.

121. Uvodeći smjenu $y^3=ux^2$, $y=vx$ dobija se

$$I=\frac{1}{40}\,\frac{(b^4-a^4)}{(pq)^{10}}\,(q^{10}-p^{10}).$$

122. Napisaćemo jednačine kružnica u obliku

$$l_1: 1-2\frac{x}{x^2+y^2}=0, \quad l_2: 1-4\frac{x}{x^2+y^2}=0,$$

$$l_3: 1-2\frac{y}{x^2+y^2}=0, \quad l_4: 1-4\frac{y}{x^2+y^2}=0$$

i koristićemo smjenu

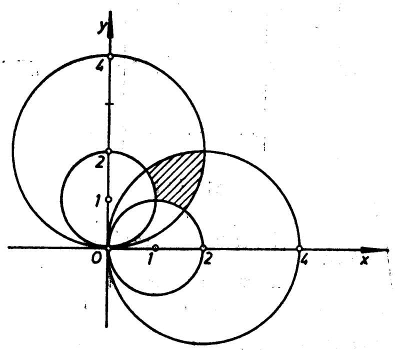
$$\frac{x}{x^2+y^2}=u, \quad \frac{y}{x^2+y^2}=v \Leftrightarrow \frac{u}{u^2+v^2}=x, \quad \frac{v}{u^2+v^2}=y.$$

Pri tome je

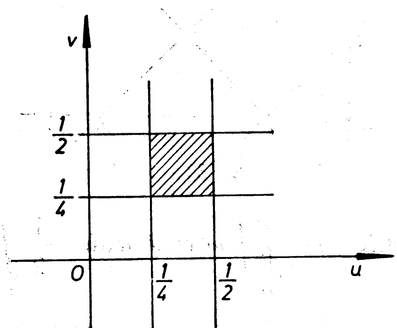
$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=-\frac{1}{(u^2+v^2)^2}, \quad u^2+v^2=\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Sada je $$I=\iint\limits_{D'} du\,dv,$$

pri čemu je oblast D' ograničena pravama $l_1' : u=\dfrac{1}{2}$, $l_2' : u=\dfrac{1}{4}$, $l_3' : v=\dfrac{1}{2}$, $l_4' : v=\dfrac{1}{4}$ (sl. 34 a i 34 b).



Sl. 34 a



Sl. 34 b

Biće

$$I=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16}.$$

Izračunati integrale:

123. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4} \operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dxdy.$ **124.** $\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}} |\cos(x+y)|\,dxdy.$

125. $\iint\limits_{D} \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}dxdy,\ D=\left\{(x,y):1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9,\ y\geqslant\frac{x}{\sqrt{3}},\ y\leqslant x\sqrt{3}\right\}.$

126. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dxdy.$ **127.** $\iint\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 2}} \sqrt{|y-x^2|}\,dxdy.$

128. $\iint\limits_{D} \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,dxdy$, D je oblast ograničena krivom $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ i koordinatnim osama.

129. $\iint\limits_{D} xydxdy$, gdje je D oblast ograničena petljom krive $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2y}{c^3}$ u prvom kvadrantu $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

Rješenja:

123. Prema definiciji funkcije sgn

$$\operatorname{sgn}\alpha=\frac{\alpha}{|\alpha|},\quad \alpha\neq 0,\ \operatorname{sgn}0=0,$$

tj.

$$\operatorname{sgn}\alpha=\begin{cases}1, & \alpha>0\\ 0, & \alpha=0\\ -1, & \alpha<0,\end{cases}$$

pa je

$$\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D_1}dxdy-\iint\limits_{D_2}dxdy,$$

gdje je $D_1\subset D$ oblast na kojoj je $f(x,y)>0$, a $D_2\subset D$ oblast na kojoj je $f(x,y)<0$. Naka su E_1, E_2 E_3 oblasti date na slici 35. Kako je na E_1 i E_2 $x^2-y^2+2<0$, na E_3 $x^2-y^2+2>0$, to je

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dxdy=\iint\limits_{E_3}dxdy-\iint\limits_{E_1}dxdy-\iint\limits_{E_2}dxdy.$$

Na osnovu toga imamo

$$I=\iint\limits_{E_3}+\iint\limits_{E_1}+\iint\limits_{E_2}-2\iint\limits_{E_1}-2\iint\limits_{E_2}=\iint\limits_{E_1\cup E_2\cup E_3}-2\iint\limits_{E_1}-2\iint\limits_{E_2}$$

tj.

$$I=\iint\limits_{x^2+x^2\leqslant 4}dxdy-2\iint\limits_{E_1}dxdy-2\iint\limits_{E_2}dxdy=4\pi-2\iint\limits_{E_1}dxdy-2\iint\limits_{E_2}dxdy.$$

Kako su E_1 i E_2 podudarne oblasti, to je

$$I=4\pi-4\iint\limits_{E_1}dxdy=4\pi-8\int\limits_0^1 dx\int\limits_{\sqrt{x^2+2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy=\frac{4\pi}{3}+8\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot$$

124. Kako je

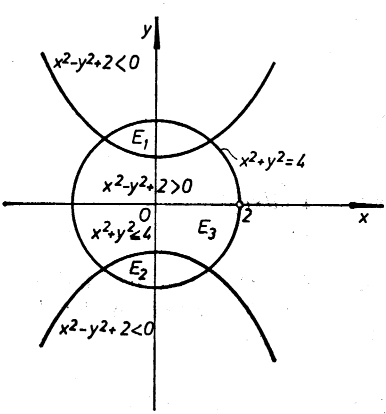
$$|\cos(x+y)|=\begin{cases}\cos(x+y) & \text{za } -\dfrac{\pi}{2}\leqslant x+y\leqslant\dfrac{\pi}{2},\quad \dfrac{3\pi}{2}\leqslant x+y\leqslant\dfrac{5\pi}{2}\\[2ex] -\cos(x+y) & \text{za } \dfrac{\pi}{2}\leqslant x+y\leqslant\dfrac{3\pi}{2},\end{cases}$$

to je

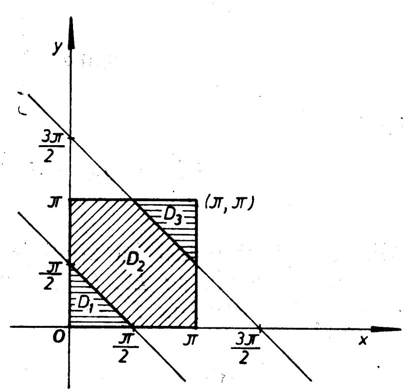
$$I=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant\pi\\0\leqslant y\leqslant\pi}}|\cos(x+y)|\,dxdy=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)\,dxdy-\iint\limits_{D_2}\cos(x+y)\,dxdy+$$

$$+\iint\limits_{D_3}\cos(x+y)\,dxdy,$$

pri čemu su D_1, D_2, D_3 oblasti označene na slici 36. Vrijednost integrala je $I=2\pi$.



Sl. 35



Sl. 36

125. $I=\frac{\pi^2}{6}$. **126.** $I=\frac{9\pi}{16}$. **127.** $I=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{4}$.

128. Uvedimo smjenu $x=\rho\cos^4\varphi$, $y=\rho\sin^4\varphi$ (parametarske jednačine krive su $x=\cos^4\varphi$, $y=\sin^4\varphi$). Biće $J=4\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi$, pa je

$$I=\iint\limits_{D'}\sqrt{\sqrt{\cos^4\varphi}+\sqrt{\sin^4\varphi}}\cdot 4\rho\cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\rho\, d\varphi=$$

$$=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi\int\limits_0^1\rho^{5/4}\, d\rho=$$

$$=\frac{16}{9}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin^3\varphi\, d\varphi=\frac{16}{9}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\sin\varphi\, d(\sin\varphi)=\frac{4}{27}.$$

129. Kako je $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 0$, to mora biti i $y\geqslant 0$, što znači da se kriva nalazi iznad x-ose; kriva je simetrična u odnosu na y-osu. Uvedimo polarne koordinate $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$. Jednačina krive u novim koordinatama je

$$\rho=\frac{a^2b}{c^3}\cos^2\varphi\sin\varphi.$$

Biće:

$$I=\iint\limits_{D'}x(\rho,\varphi)\,y(\rho,\varphi)\,ab\,\rho\, d\rho\, d\varphi=ab\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\frac{a^2b}{c^3}\cos^2\varphi\sin\varphi}ab\,\rho^2\cos\varphi\sin\varphi\cdot\rho\, d\rho=$$

$$=a^2b^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi\int\limits_0^{\frac{a^2b}{c^3}\cos^2\varphi\sin\varphi}\rho^3\, d\rho=\frac{a^{10}b^6}{4c^{12}}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\cdot\sin^5\varphi\, d\varphi=$$

$$=\frac{a^{10}b^6}{c^{12}}\cdot\frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)^4\sin^5\varphi\, d(\sin\varphi)=$$

$$=\frac{a^{10}b^6}{c^{12}}\cdot\frac{1}{8}\int\limits_0^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)^4\cdot\sin^4\varphi\, d(\sin^2\varphi)=$$

$$=\frac{a^{10}b^6}{c^{12}}\frac{1}{8}\int\limits_0^1(1-u)^4\cdot u^2\, du=\frac{1}{840}\frac{a^{10}b^6}{c^{12}}.$$

Primjedba. Neka student nacrta krivu $l:\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\frac{x^2y}{c^3}$ u sistemu Oxy pomoću jednačine $\rho=\frac{a^2b}{c^3}\cos^2\varphi\sin\varphi$ (koristeći se značenjem ugla φ) i neka nacrta krivu l' u sistemu $O\rho\varphi$.

Izračunati površinu P oblasti ograničene linijama:

130. $y=x,\ y=\frac{x^2}{2}$. **131.** $x=0,\ y=0,\ y=1,\ x=2,\ xy=1$.

132. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\ y=0$.

133. $xy=1,\ xy=8,\ y^2=x,\ y^2=8x$.

134. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. **135.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

136. $(x^2+y^2)^2=2ax^3$. **137.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$.

138. $x^3+y^3=axy$. **139.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=x^2+y^2$.

140. $y^2=px,\ y^2=qx,\ x^2=ay,\ x^2=by,\ 0<p<q,\ 0<a<b$.

141. $xy=p,\ xy=q,\ y^2=ax,\ y^2=bx,\ 0<p<q,\ 0<a<b$.

142. $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1,\ a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

143. $\frac{x^2}{ch^2u_1}+\frac{y^2}{sh^2u_1}=c^2,\ \frac{x^2}{ch^2u_2}+\frac{y^2}{sh^2u_2}=c^2,\ (0<u_1<u_2)$

$\frac{x^2}{\cos^2 v_1}-\frac{y^2}{\sin^2 v_1}=c^2,\ \frac{x^2}{\cos^2 v_2}-\frac{y^2}{\sin^2 v_2}=c^2,\ (0<v_1<v_2)$

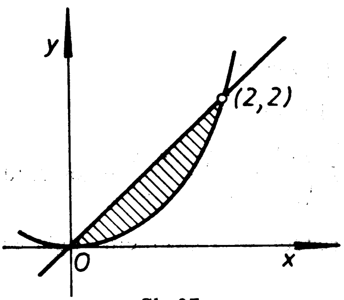
$(x>0,\ y>0)$.

144. $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

145. $y^2=4(1-x),\ x^2+y^2=4$ (van parabole).

Rješenja:

130. Po definiciji dvostrukog integrala $P=P(D)=\iint\limits_D dxdy$.



Sl. 37

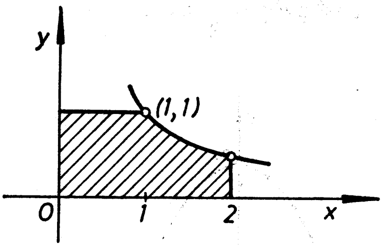
U ovom slučaju (sl. 37)

$$P=\int_0^2 dx\int_{x^2/2}^{x} dy=\int_0^2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

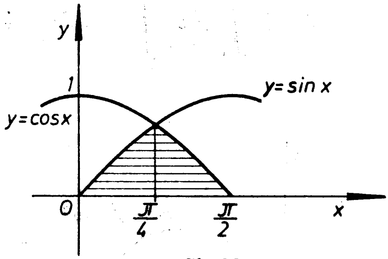
$$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^2=2-\frac{4}{3}=\frac{2}{3}.$$

131. Oblast D data je na sl. 38, pa je

$$P=\int_0^1 dx\int_0^1 dy+\int_1^2 dx\int_0^{1/x} dy=1+\int_1^2\frac{dx}{x}=1+\ln\ 2.$$



Sl. 38



Sl. 39

132. $P=\int\limits_0^{\pi/4} dx\int\limits_0^{\sin x} dy+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx\int\limits_0^{\cos x} dy=\int\limits_0^{\pi/4}\sin x\,dx+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\cos x\,dx=$

$$=2-\sqrt{2}\ \text{(sl. 39)}.$$

133. $P=7\ \ln\ 2$ $\left(\text{Preporučuje se smjena } xy=u,\ \dfrac{y^2}{x}=v\right).$

134. Uvedimo smjenu $x=a\rho\cos\varphi,\ y=d\rho\sin\varphi$. Biće

$$P=\iint\limits_D dxdy=ab\iint\limits_{D'}\rho\,d\rho\,d\varphi=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\,d\rho=ab\,\pi.$$

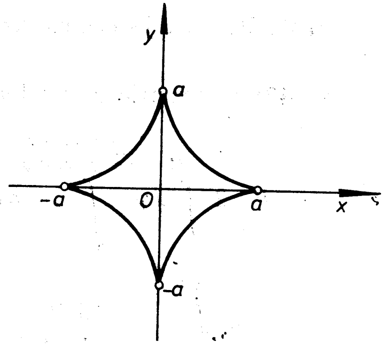
135. Kriva ima oblik na sl. 40. Uvedimo smjenu $x=\rho\cos^3\varphi,\ y=$ $=\rho\sin^3\varphi$. U novim koordinatama data kriva ima jednačinu $\rho=a$, prava $x=0$ jednačinu $\varphi=\pi/2$, a prava $y=0$ jednačinu $\varphi=0$. Kako je

$$J=\frac{D(x,\ y)}{D(\rho,\ \varphi)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\cos^3\varphi & -3\rho\cos^2\varphi\sin\varphi\\ \sin^3\varphi & 3\rho\sin^2\varphi\cos\varphi\end{vmatrix}=$$

$$=3\rho(\sin^2\varphi\cos^4\varphi+\cos^2\varphi\sin^4\varphi)=$$

$$=3\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$



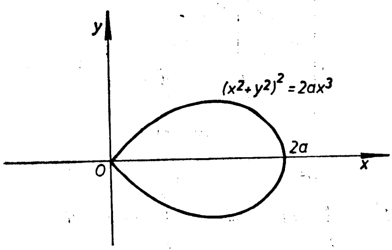
Sl. 40

biće

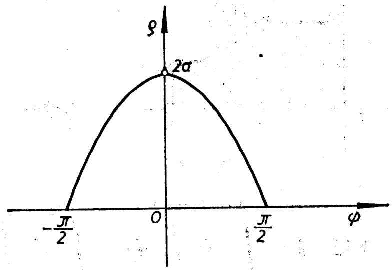
$$P=4\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^a 3\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\rho=12\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^a\rho\,d\rho=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

136. Uvedimo smjenu $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$; jednačina krive u novim koordinatama je $\rho=2a\cos^3\varphi$. Kriva se nalazi desno od y-ose, simetrična je u odnosu na x-osu. Kriva je data na slici 41a, a njena slika u sistemu $O\rho\varphi$ na slici 41b.

$$P=2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2a\cos^3\varphi}\rho\,d\rho=4a^2\int_0^{\pi/2}\cos^6\varphi\,d\varphi=\frac{5}{8}\pi a^2.$$



Sl. 41a



Sl. 41b

137. Uvedimo smjenu $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$. Jednačina $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{xy}{c^2}$ postaje $\rho=\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\varphi\cos\varphi}$. Kriva se nalazi u prvom i trećem kvadrantu $(xy>0)$, i simetrična je u odnosu na koordinatni početak. Zato je

$$P=2\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin\varphi\cos\varphi}}ab\,\rho\,d\rho=\frac{a^2b^2}{c^2}\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{a^2b^2}{2c^2}.$$

138. Polarna jednačina krive $\rho=\frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}$. Kriva (Dekartov list, sl. 42) je simetrična u odnosu na pravu $y=x\left(\varphi=\frac{\pi}{4}\right)$. Biće:

$$P=2\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{\frac{a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi+\cos^3\varphi}}\rho\,d\rho=a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(\sin^3\varphi+\cos^3\varphi)^2}d\varphi=$$

$$=a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{\cos^2\varphi\,(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}d\varphi=a^2\int_0^{\pi/4}\frac{\operatorname{tg}^2\varphi\,d(\operatorname{tg}\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}=$$

$$=\frac{a^2}{3}\int_0^{\pi/4}\frac{d(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}{(1+\operatorname{tg}^3\varphi)^2}=\left(-\frac{a^2}{3(1+\operatorname{tg}^3\varphi)}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{a^2}{6}.$$

139. Koristiti smjenu $x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\sin\varphi.$

$$P=4ab\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\sqrt{a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi}}\rho\,d\rho=\frac{\pi}{2}ab(a^2+b^2).$$

140. Koristiti smjenu $y^2=ux;\ x^2=vy;\ P=\frac{1}{3}(q-p)(b-a).$

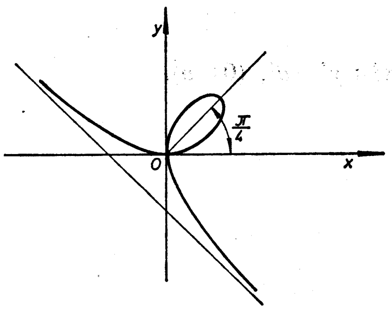
141. $P=\frac{1}{3}(q-p)\ln\frac{b}{a}.$

142. Stavimo $u=a_1x+b_1y+c_1;\ v=a_2x+b_2y+c_2;$ dobija se jednačina date linije u obliku $u^2+v^2=1.$ Kako je

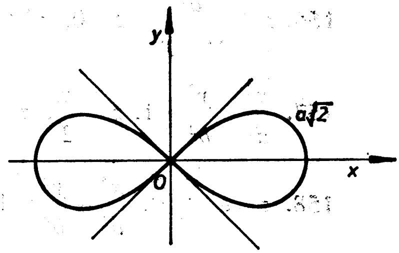
$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\frac{D(u,v)}{D(x,y)}}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

to

$$P=\iint_{D'}\frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|}\,du\,dv=\frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|}\iint_{u^2+v^2\leqslant 1}du\,dv=\frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}.$$



Sl. 42



Sl. 43

143. $P=\frac{c^2}{4}(v_2-v_1)(\operatorname{sh}2u_2-\operatorname{sh}2u_1)-(u_2-u_1)(\sin 2v_2-\sin 2v_1)$ (koristiti se smjenom $x=c\operatorname{ch}u\cos v,\ y=c\operatorname{sh}u\sin v$).

144. Polarna jednačina krive je $\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$, odakle se zaključuje da se kriva (sl. 43) nalazi u oblastima za koje je $\cos 2\varphi\geqslant 0$, tj.

$$-\frac{\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4};\quad \frac{3\pi}{4}\leqslant\varphi\leqslant\frac{5\pi}{4}.$$

$$P=4\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}}\rho\,d\rho=4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi=2a^2.$$

145. $P = 2\pi - \dfrac{8}{3}$.

Izračunati zapreminu tijela ograničenog površima:

146. $y = 1 + x^2, \; z = 3x, \; y = 5, \; z = 0.$

147. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1, \; (a, \; b, \; c > 0), \; x = 0, \; y = 0, \; z = 0.$

148. $2x + 3y - 12 = 0, \; z = \dfrac{1}{2} y^2, \; x = 0, \; y = 0, \; z = 0.$

149. $z = 4 - x^2, \; 2x + y = 4 \; (x \geqslant 0), \; x = 0, \; y = 0, \; z = 0.$

150. $z^2 = xy, \; x = a, \; x = 0, \; y = a, \; y = 0.$

151. $x^2 + y^2 = x, \; x^2 + y^2 = 2x, \; z = x^2 + y^2, \; y = x, \; y = -x, \; z = 0.$

152. $x^2 + y^2 = Rx, \; x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (Vivanijevo tijelo).

153. $x^2 + y^2 = R^2, \; x^2 + z^2 = R^2.$

154. $x^2 + y^2 = R^2, z = \dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2}.$

155. $x^2 + y^2 = ax, \; z^2 = 2ax.$

156. $z = \dfrac{a^2}{x^2 + y^2}, \; z = 0, \; x^2 + y^2 = 1, \; x^2 + y^2 = a^2, \; (0 < a).$

157. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \; z = \dfrac{x}{2}, \; z = x.$

158. $z = e^{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}, \; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

159. $z^2 = (x + a)^2, \; x^2 + y^2 = a^2.$

160. $x^2 + y^2 - az = 0, \; (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2), \; z = 0, \; (a > 0).$

161. $z^2 = a^2 (x^2 + y^2), \; x^2 + y^2 - bx = b\sqrt{x^2 + y^2}, \; (a, \; b > 0).$

162. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z}{c} = 1, \; \left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \; z = 0.$

Rješenja:

146. Tijelo se sastoji iz dva jednaka dijela, i projektuje se na ravan $z = 0$ na oblast datu na sl. 44. Jedan dio se nalazi ispod, a drugi iznad ravni $z = 0$.

$$V=2\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant 2\\ 1+x^2\leqslant y\leqslant 5}} 3x\,dxdy=6\int_0^2 x\,dx\int_{1+x^2}^{5} dy=24.$$

147. $$V=\iint\limits_D z\,dxdy=\int_0^a dx\int_0^{b-\frac{b}{a}x} c\left(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)dy=$$

$$=c\int_0^a\left(y-\frac{xy}{a}-\frac{y^2}{2b}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b-\frac{b}{a}x}dx=\frac{abc}{6}.$$

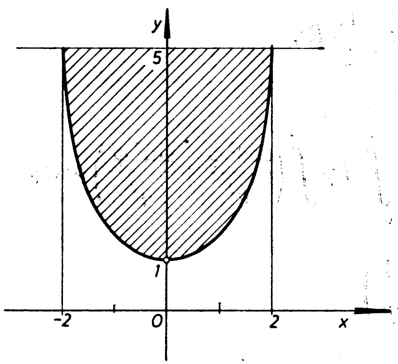
148. $$V=\iint\limits_D z\,dxdy=\int_0^6 dx\int_0^{\frac{12-2x}{3}}\frac{1}{2}y^2\,dy=\frac{1}{6}\int_0^6 y^3\Bigg|_0^{\frac{12-2x}{3}}dx=$$

$$=\frac{1}{162}\int_0^6(12-2x)^3\,dx=\frac{-1}{162\cdot 8}(12-2x)^4\Bigg|_0^6=\frac{12^4}{162\cdot 8}=\frac{6^4}{81}=16.$$

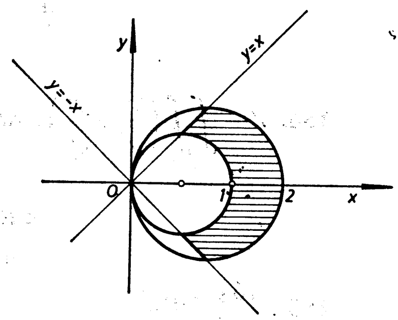
149. $13\frac{1}{3}$. **150.** $\frac{4}{9}a^3$.

151. $V=\iint\limits_D(x^2+y^2)\,dxdy$, pri čemu je D oblast ograničena datim kružnicama i pravama (sl. 45). Biće: ($x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$).

$$V=\iint\limits_{D'}\rho^3\,d\rho\,d\varphi=2\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho^3\,d\rho=\frac{15}{64}(3\pi+2).$$



Sl. 44



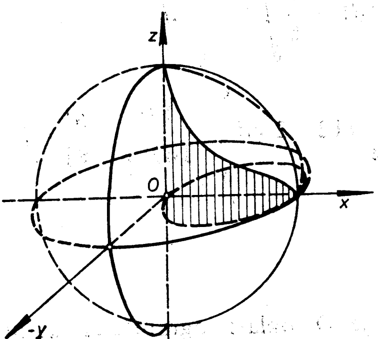
Sl. 45

152. $V = 2 \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$, pri čemu je D unutrašnjost kruga $x^2 + y^2 = Rx$ (sl. 46). Smjenom $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ jednačina $x^2 + y^2 = Rx$ postaje $\rho = R \cos \varphi$, pa je

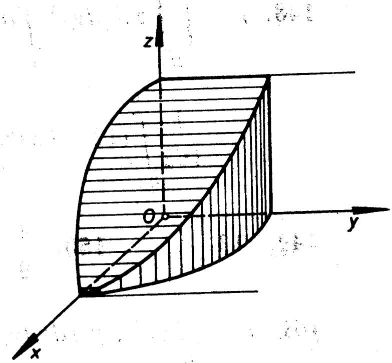
$$V = 2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho = 4 \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho =$$

$$= \frac{4}{3} R^3 \int\limits_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \varphi)\, d\varphi = \frac{4}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

153. Tijelo se sastoji iz osam jednakih dijelova, od kojih je samo jedan prikazan na sl. 47.



Sl. 46



Sl. 47

$$V = 8 \iint\limits_D z dxdy = 8 \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2}\, dxdy = 8 \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy =$$

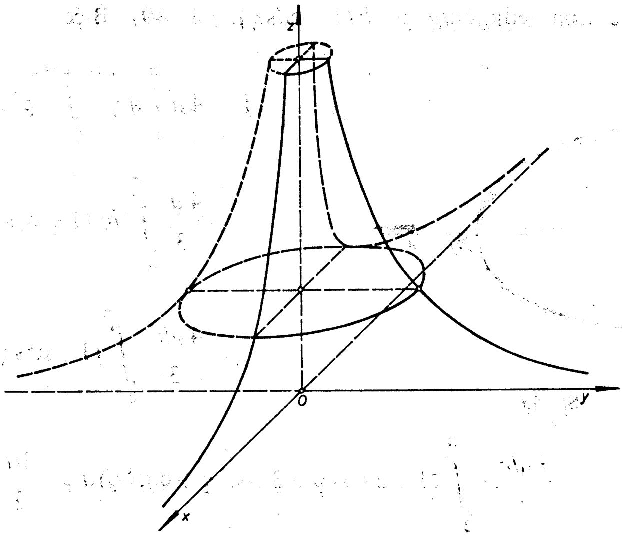
$$= 8 \int\limits_0^R (R^2 - x^2)\, dx = \frac{16}{3} R^3.$$

154. $V = \iint\limits_D \left(\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} \right) dxdy = 4 R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \left(\frac{\cos^2 \varphi}{p^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{q^2} \right) \rho^3\, d\rho =$

$$= \frac{\pi R^4}{4} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right).$$

155. $\frac{16\sqrt{2}}{15} a^3.$

156. Površ $z=\dfrac{a^2}{x^2+y^2}$ siječe se sa cilindrom $x^2+y^2=1$ u ravni $z=a^2$, a sa cilindrom $x^2+y^2=a^2$ u ravni $z=1$ (sl. 48). Biće



Sl. 48

$$V=\iint\limits_D \frac{a^2}{x^2+y^2}\,dxdy,$$

pri čemu je D kružni prsten određen krugovima poluprečnika 1 i a. Dakle,

$$V=a^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^a \frac{d\rho}{\rho}=2\pi a^2 \ln a,\ (1<a),$$

$$V=a^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^1 \frac{d\rho}{\rho}=2\pi a^2 \ln \frac{1}{a},\ (0<a<1).$$

157. $V=\dfrac{4}{3}a^2 b.$ **158.** $ab\pi\left(1-\dfrac{1}{e}\right).$

159. $2\pi a^3.$ **160.** $\dfrac{\pi a^3}{8}.$

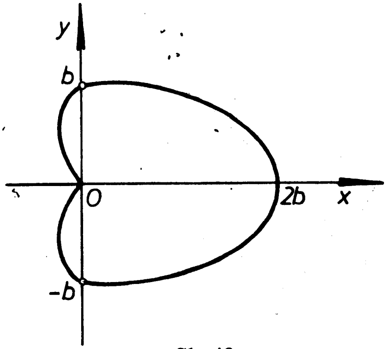
161. $V=2\iint\limits_D |z|\,dxdy$, pri čemu je D oblast ograničena krivom $x^2+y^2-bx=b\sqrt{x^2+y^2}$, tj.

$$V=2\iint\limits_D a\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

Uvodeći smjenu $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, dobija se

$$V=2a\iint_{D'}\rho^2\,d\rho\,d\varphi;$$

a data kriva ima jednačinu $\rho=b(1+\cos\varphi)$, (sl. 49). Biće:



Sl. 49

$$V=4a\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{b(1+\cos\varphi)}\rho^2\,d\rho=$$

$$=\frac{4a}{3}\int_0^{\pi}b^3(1+\cos\varphi)^3\,d\varphi=$$

$$=\frac{4ab^3}{3}\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^3\,d\varphi=$$

$$=\frac{4ab^3}{3}\cdot\int_0^{\pi}(1+3\cos\varphi+3\cos^2\varphi+\cos^3\varphi)\,d\varphi=\frac{10}{3}ab^3\pi.$$

162. Uvedimo smjenu $x=a\rho\cos^3\varphi$, $y=b\rho\sin^3\varphi$; tada je Jakobijan

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}=3ab\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi.$$ Biće:

$$V=4c\iint_D\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=$$

$$=4c\iint_{D'}(1-\rho^2\cos^6\varphi-\rho^2\sin^6\varphi)\cdot 3ab\rho\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\rho\,d\varphi=$$

$$=12abc\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi\int_0^1[\rho-\rho^3(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)]\,d\rho=$$

$$=12abc\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)\right]d\varphi=$$

$$=6abc\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi-3abc\int_0^{\pi/2}\cos^8\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi-$$

$$-3abc\int_0^{\pi/2}\sin^8\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi.$$

$$V=\frac{75abc}{256}.$$

163. Izračunati integral $I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ (Poasonov integral).

Rješenje. Integral konvergira, što se lako utvrđuje pomoću nejednakosti $e^{-x^2}<e^{-x}$ za $x>1$. Iz

$$I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx \quad \text{i} \quad I=\int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

dobija se

$$I^2=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx\int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,dy=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

Uvodeći polarne koordinate dobija se

$$I^2=\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^\infty e^{-\rho^2}\rho\,d\rho=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right)\Bigg|_0^\infty=\frac{\pi}{4}.$$

Dakle,

$$I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Za koje vrijednosti parametra p postoje integrali:

164. $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$, **165.** $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\geqslant a^2}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$?

Rješenja:

164. Integral je nesvojstven samo za $p>0$, jer tada funkcija $f(x, y)=$ $=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^p}\to\infty$ kad $(x, y)\to(0, 0)$, (sl. 48).

Uvedimo polarne koordinate $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Za $p\neq 1$ imamo

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_\varepsilon^a\frac{\rho\,d\rho}{\rho^{2p}}=2\pi\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^a\frac{d\rho}{\rho^{2p-1}}=\frac{2\pi}{2(1-p)}\lim_{\varepsilon\to 0}\rho^{2(1-p)}\Bigg|_\varepsilon^a$$

$$=\frac{2\pi}{2(1-p)}[a^{2(1-p)}-\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{2(1-p)}].$$

Zaključujemo da će integral postojati ako je $1-p>0$, tj. $p<1$. Za $p=1$ dobija se $I=2\pi\ln a-2\pi\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\ln\varepsilon=+\infty$.

165. Integral je nesvojstven, jer je oblast integracije beskonačna. Pokazuje se da integral konvergira za $p>1$.

166. Pokazati da integral

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 1\\ y\geqslant 1}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

divergira, iako postoje integrali

$$\int_1^{\infty} dx \int_1^{\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy \quad \text{i} \quad \int_1^{\infty} dy \int_1^{\infty} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx.$$

Izračunati integrale:

167. $$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$ **168.** $$\iint\limits_{y\geqslant x^2+1} \frac{dxdy}{x^4+y^2}.$$

Rješenja:

167. $$I=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0} \left[-\sqrt{1-\rho^2}\right]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= 2\pi\left(1-\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}\right) = 2\pi.$$

168. $\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$.

169. Koristeći smjenu $x=\rho^{\frac{2}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\varphi$, $y=\rho^{\frac{2}{q}}\sin^{\frac{2}{q}}\varphi$ pokazati da integral

$$\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0,\, y\geqslant 0\\ x^p+y^q\leqslant 1}} \frac{dxdy}{(x^p+y^q)^s} \;(p,\, q,\, s>0)$$

konvergira za $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}>s$.

170. Dokazati nejednakost Bunjakovskog:

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Rješenje. Pođimo od nejednakosti

$$\iint\limits_{\substack{a\leqslant x\leqslant b\\ a\leqslant y\leqslant b}} [f(x)\,g(y)-f(y)\,g(x)]^2\,dxdy \geqslant 0.$$

Odatle je

$$\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(y)\,dy-2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\int_a^b f(y)\,g(y)dy+$$

$$+\int_a^b g^2(x)\,dx\int_a^b f^2(y)\,dy\geqslant 0.$$

Stavljajući x umjesto y dobija se

$$\int_a^b f^2(x)\,dx\int_a^b g^2(x)\,dx-\Big[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\Big]^2\geqslant 0,$$

tj. postavljena nejednakost.

171. Da li za funkciju $f(x, y)=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ važi $\displaystyle\int_0^1 dx\int_0^1 f(x, y)\,dy=$

$$=\int_0^1 dy\int_0^1 f(x, y)\,dx?$$

Rješenje. Ne, jer je

$$\int_0^1 dx\int_0^1\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy=\int_0^1 dx\left[\frac{-y}{x^2+y^2}\right]_{y=0}^{y=1}=-\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}=-\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx=\int_0^1 dy\left[\frac{x}{x^2+y^2}\right]_{x=0}^{x=1}=\int_0^1\frac{dy}{y^2+1}=\frac{\pi}{4}.$$

172. Primjenom integracije pod znakom integrala izračunati integral

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx\quad(a>0,\ b>0).$$

Rješenje. Funkcija x^y je neprekidna u oblasti $0\leqslant x\leqslant 1$, $a\leqslant y\leqslant b$, pa je

$$\int_0^1 dx\int_a^b x^y\,dy=\int_a^b dy\int_0^1 x^y\,dx,$$

odnosno

$$\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\,dx=\ln\frac{b+1}{a+1}.$$

173. Izračunati $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{(x^2+1)^2}.$

Rješenje. Traži se $f(1)$ za funkciju

$$f(y)=\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+y^2)^2}.$$

Poslije diferenciranja po y iz jednakosti

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{1}{y}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}$$

dobija se

$$\int_0^1 \frac{-2\,y\,dx}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{1}{y^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}-\frac{1}{y}\,\frac{1}{(1+y^2)}$$

i zatim

$$f(y)=\frac{1}{2\,y^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}+\frac{1}{2\,y^2\,(1+y^2)}.$$

Biće

$$f(1)=\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$$

Koristeći se diferenciranjem pod znakom integrala izračunati:

174. $f(y)=\int_1^2 \frac{\ln xy}{x}\,dx.$ **175.** $f(y)=\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} yx}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ (y>0);$

176. $f(y)=\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{arc\,tg}(y\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}\,dx.$

Rješenja:

174. Diferenciranjem slijedi

$$f'(y)=\int_1^2 \frac{dx}{xy}=\frac{1}{y}\ln 2,$$

i zatim

$$f(y)=\ln 2\ln y+C.$$

Konstantu C određujemo iz uslova

$$C=f(1)=\int_1^2 \frac{\ln x}{x}\,dx,$$

tj.

$$C=\frac{(\ln 2)^2}{2}.$$

Dakle, $f(y)=\ln 2 \ln y+\frac{(\ln 2)^2}{2}$.

175. Biće

$$f'(y)=\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2y^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \quad \text{(smjena } (1-x)=(1+x)\,t^2\text{)}$$

i zatim

$$f(y)=\frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)+C.$$

Kako je $f(0)=0$, to je $C=0$ i

$$f(y)=\frac{\pi}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$$

176. $f(y)=\frac{\pi}{2}\ln|y+1|$.

177. Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$. Označimo sa f_1 integral od f preko razmaka (a, y), $(a\leqslant y\leqslant b)$, i uopšte sa f_n integral od f_{n-1} preko razmaka (a, y), $(n=1, 2, \dots; f_0=f)$. Dokazati da je

$$f_n(y)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^y (y-x)^{n-1} f(x)\, dx. \tag{1}$$

Rješenje. Dokaz ćemo izvesti matematičkom indukcijom. Očigledno jednakost (1) važi za $n=1$. Pretpostavimo da jednakost (1) važi za $n=k$, i dokažimo da važi za $n=k+1$.

Označimo

$$\Phi(y)=\frac{1}{k!}\int_a^y (y-x)^k f(x)\, dx. \tag{2}$$

Kako iz (2) slijedi

$$\Phi'(y)=\frac{1}{(k-1)!}\int_a^y (y-x)^{k-1} f(x)\, dx=f_k(y),$$

a po samoj konstrukciji funkcije f_{k+1} je $f'_{k+1}(y)=f_k(y)$, to se dobija

$$\Phi(y)=f_{k+1}(y)+C. \tag{3}$$

S obzirom da je $\Phi(0)=0$, $f_{k+1}(0)=0$, to $C=0$, pa $\Phi(y)=f_{k+1}(y)$, što je i trebalo dokazati.

Ispitati konvergenciju integrala:

178. $f(y)=\int\limits_1^\infty \frac{dx}{y^2+x^2}$.

179. $f(y)=\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^{1+y}}$.

180. $f(y)=\int\limits_0^\infty e^{-xy}\,dx$.

181. $f(y)=\int\limits_0^\infty x^{y-1}e^{-x}\,dx$.

182. $f(y)=\int\limits_0^\infty e^{-xy}\frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$.

183. $f(y)=\int\limits_0^\infty \frac{\sin xy}{x^\alpha}\,dx$.

Rješenja:

178. Kako je $\frac{1}{y^2+x^2}\leqslant\frac{1}{x^2}$ za svaki realan broj y, to, po Vajerštrasovom (Weierstrass) kriteriju, integral konvergira ravnomjerno po $y\in(-\infty,\infty)$.

179. Integral divergira za $y\leqslant 0$, za $y>0$ konvergira.

180. Za $y\leqslant 0$ integral je divergentan. Za $y>0$ biće

$$f(y)=-\frac{e^{-xy}}{y}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty}=\frac{1}{y}.$$

181. Kako za $0<y<1$ i $x\to 0$, $x^{y-1}e^{-x}\to+\infty$, to je integral nesvojstven u odnosu na obje granice. Zato ćemo pisati

$$f(y)=\int\limits_0^1 x^{y-1}e^{-x}\,dx+\int\limits_1^\infty x^{y-1}e^{-x}\,dx=f_1(y)+f_2(y).$$

Za $y<0$ pokazuje se da je prvi integral divergentan. Naime, stavljajući $y=-z$, $(z>0)$, može se pisati

$$f_1(-z)=\int\limits_0^1\frac{e^{-x}}{x^{1+z}}\,dx>\frac{1}{e}\int\limits_0^1\frac{dx}{x^{1+z}}=+\infty.$$

Za $y=0$, biće

$$f_1(0)=\int\limits_0^1\frac{e^{-x}}{x}dx>\frac{1}{e}\int\limits_0^1\frac{dx}{x}=\frac{1}{e}\ \ln x\Bigg|_0^1=+\infty,$$

što znači da je integral divergentan.

Ako je $0<y<1$, onda

$$f_1(y)=\int_0^1 x^{y-1}e^{-x}\,dx<\int_0^1 x^{y-1}\,dx=\frac{1}{y},$$

tj. integral je konvergentan.

Takođe je i integral $f_2(y)$ konvergentan za $0<y<1$.

Neka je sada $y\geqslant 1$. Jasno je da je integral $f_1(y)$ konačan broj.

Integral $f_2(y)$ je takođe konvergentan za $y\geqslant 1$, što se može pokazati parcijalnom integracijom.

Dakle, dati integral je konvergentan za $y>0$.

182. Pisaćemo:

$$f(y)=\int_0^1 e^{-xy}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx+\int_1^\infty e^{-xy}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx=f_1(y)+f_2(y)$$

i razmotrićemo slučaj $y\geqslant 0$.

Kako je

$$\int_0^1 e^{-xy}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx\leqslant\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha},\ (y\geqslant 0),$$

to je integral $f_1(y)$ ravnomjerno konvergentan po $y\geqslant 0$ za $\alpha<1$.

Za ispitivanje integrala $f_2(y)$ koristićemo drugu formulu o srednjoj vrijednosti integrala

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)\,\varphi(x,\ y)\,dx=\varphi(x_1,\ y)\int_{x_1}^{c} f(x,\ y)\,dx$$

koja važi ako je funkcija $\varphi(x,\ y)$ nerastuća po x (i nenegativna), a integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x,\ y)\,dx$ konačan.

Kako je funkcija e^{-xy} (kao funkcija od x) nerastuća (i nenegativna) za $y\geqslant 0$, to je

$$\int_1^l e^{-xy}\frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx=e^{-y}\int_1^c\frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx,$$

i uzimajući u obzir da integral

$$\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^\alpha}\,dx$$

konvergira za $\alpha>0$ (što se može pokazati takođe pomoću druge formule o srednjoj vrijednosti integrala), slijedi konvergencija integrala $f_2(y)$ ravnomjerno po $y\geqslant 0$, (za svako $\alpha>0$).

Dakle dati integral $f(y)$ konvergira ravnomjerno po $y \geqslant 0$ za svako $\alpha \in (0, 1)$.

183. Integral je nesvojstven u odnosu na obje granice, pa ćemo pisati

$$f(y)=\int_0^\infty \frac{\sin xy}{x^\alpha}\,dx=\int_0^1 \frac{\sin xy}{x^\alpha}\,dx+\int_1^\infty \frac{\sin xy}{x^\alpha}\,dx=f_1(y)+f_2(y).$$

Za integral f_1 važi procjena

$$|f_1|\leqslant \int_0^1 \frac{|\sin xy|}{x^\alpha}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{|xy|}{x^\alpha}\,dx=|y|\cdot \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}=\frac{|y|}{2-\alpha} \quad \text{za } \alpha<2.$$

Dakle, integral f_1 konvergira ravnomjerno po $y \in [-M, M]$ za svako $\alpha<2$.

Za integral f_2 važi procjena

$$|f_2|\leqslant \int_1^\infty \frac{|\sin xy|}{x^\alpha}\,dx \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha-1} \quad \text{za } \alpha>1.$$

Dakle, integral f_2 konvergira ravnomjerno po $y \in (-\infty, \infty)$ za svako $\alpha>1$.

Konačno, dati integral konvergira ravnomjerno po $y \in [-M, M]$, za $\alpha \in (1, 2)$, pri čemu je M po volji veliki broj.

184. Koristeći jednakost

$$\int_0^\infty e^{-xy}\,dx=\frac{1}{y}, \quad (y>0),$$

izračunati integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx, \quad 0<a<b.$$

Rješenje. Kako je integral $\int_0^\infty e^{-xy}\,dx$ konvergentan ravnomjerno po $y \geqslant y_0 > 0$, to se smije izvršiti izmjena poretka integrala

$$\int_a^b dy \int_0^\infty e^{-xy}\,dx=\int_0^\infty dx \int_a^b e^{-xy}\,dy=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx,$$

pa je

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,dx=\int_a^b \frac{dy}{y}=\ln\frac{b}{a}.$$

185. Koristeći jednakost

$$\int_0^\infty e^{-yx}\cos\beta x\,dx=\frac{y}{y^2+\beta^2}, \tag{1}$$

koja se za $y>0$ dobija neposrednom integracijom, izračunati integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin zx}{x}\,dx, \quad (z>0) \tag{2}$$

i zatim integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\,dx. \tag{3}$$

Rješenje. Kako je $e^{-yx}|\cos\beta x|\leqslant e^{-yx}$ za svaki realan broj β, to integral (1) konvergira ravnomjerno po $\beta\in(-\infty,\ \infty)$ za $y>0$. Zato je s jedne strane,

$$\int_0^z d\beta\int_0^\infty e^{-yx}\cos\beta x\,dx=\int_0^z\frac{y}{y^2+\beta^2}\,d\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y}$$

i, s druge strane,

$$\int_0^\infty dx\int_0^z e^{-yx}\cos\beta x\,d\beta=\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y},$$

odnosno

$$\int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin zx}{x}\,dx=\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y}. \tag{4}$$

Za $y=1$ iz (4) se dobija

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin zx}{x}\,dx=\operatorname{arc\,tg} z \tag{5}$$

i zatim za $z=1$

$$\int_0^\infty e^{-x}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{4}. \tag{6}$$

Za slučaj da je $z=y$ iz (4) se dobija

$$\int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin yx}{x}\,dx=\frac{\pi}{4}, \text{ za svako } y>0. \tag{7}$$

Puštajući da $y\to 0$, iz (4) slijedi

$$\int_0^\infty \frac{\sin zx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}, \text{ za svako } z>0. \tag{8}$$

Sada na osnovu (8) slijedi

$$\int_a^b dz\int_0^\infty \frac{\sin zx}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}(b-a)$$

odnosno, poslije promjene reda integracije,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}(b-a).$$

Izračunati integrale:

186. $f(y)=\int_0^\infty \frac{1-\cos xy}{x}e^{-kx}\,dx\,(y>0,\ k>0).$

187. $f(y)=\int_0^\infty \frac{1-e^{-xy}}{xe^x}\,dx.$ **188.** $f(y)=\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tg} xy}{x(1+x^2)}\,dx.$

Rješenja:

186. Diferenciranjem se dobija

$$f'(y)=\int_0^\infty e^{-kx}\sin xy\,dx=\frac{y}{y^2+k^2},$$

odakle je

$$f(y)=\frac{1}{2}\log(y^2+k^2)+C.$$

Konstantu C određujemo iz uslova $f(0)=0$, odakle je $C=-\frac{1}{2}\log k^2$.

Otud je

$$f(y)=\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{y^2}{k^2}\right).$$

187. $f(y) = \log(1+y), \ (y \geqslant 0).$

188. $f(y) = \frac{\pi}{2}\log(1+y), \ (y \geqslant 0)$.

189. Diferencirajući n puta jednakost $\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}$ po a, pokazati da je

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \ (a>0).$$

190. Koristeći jednakost

$$\int_0^1 x^{y-1}dx = \frac{1}{y}, \ (y>0),$$

pokazati da je

$$\int_0^1 x^{y-1}\log^n x\,dx = \frac{(-1)^n n!}{y^{n+1}}, \ (n \text{ prirodan broj}).$$